Capítulo VII. La recta y el plano en el espacio

Objetivo: El alumno aplicará el álgebra vectorial para obtener las diferentes ecuaciones de la recta y del plano, así como para determinar las relaciones entre ellos y con puntos en el espacio de tres dimensiones.

Contenido:

7.1 Ecuación vectorial y ecuaciones paramétricas de la recta. Ecuaciones cartesianas en forma simétrica y en forma general de la recta. Distancia de un punto a una recta. **7.2** Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre rectas, Ángulo entre dos rectas. Distancia entre dos rectas. Intersección entre dos rectas.
7.3 Ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuación cartesiana del plano.
7.4 Distancia de un punto a un plano. Ángulo entre dos planos.
7.5 Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre planos.
7.6 Distancia entre dos planos.
7.7 Intersección entre planos.
7.8 Ángulo entre una recta y un plano.
7.9 Condición de paralelismo y condición de perpendicularidad entre una recta y un plano.
7.10 Intersección de una recta con un plano.
7.11 Distancia entre una recta y un plano.

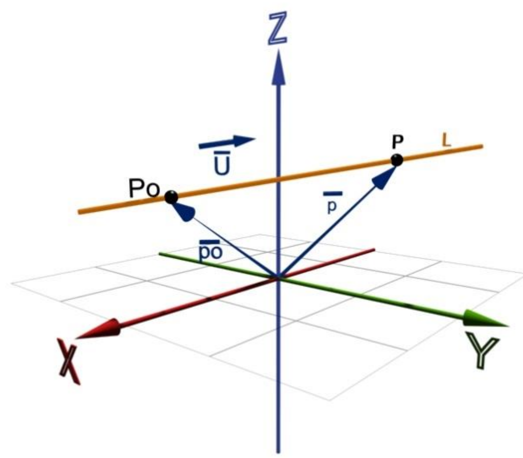
La recta en el espacio

7.1 Ecuación vectorial, paramétricas y cartesianas.

Ecuación vectorial.

Sea un punto P(x_0, y_0, z_0) y sea $\bar{u} = (a, b, c)$ un vector dado, tal que $\bar{u} \neq 0$.

Definición. Una recta es el conjunto de puntos P(x, y, z) tales que el vector de posición $\bar{p}$ de cualquiera de ellos se puede expresar con la suma del vector de posición $\overline{p_0}$ del punto p_0 mas un vector paralelo al vector $\bar{u}$.



De la imagen anterior observamos que:

$\bar{p} - \overline{p_0}$ es paralelo al vector $\bar{u}$; es decir $\bar{p} - \overline{p_0} = t\bar{u}$

Despejando a $\bar{p}$ de la ecuación anterior, se obtiene:

$$\mathbf{\bar{p} = \overline{p_0} + t\bar{u}}$$

Que es la **ecuación vectorial** de la línea recta.

Además el segmento $\overline{P_0P_1}$ tiene la misma dirección del vector $\bar{u}$, por lo tanto:

$$\mathbf{\bar{p} = \overline{p_0} + t(\overline{p_1} - \overline{p_0})}$$

que es la **ecuación vectorial** de la línea recta dados dos puntos.

Ecuaciones paramétricas.

Si $\bar{u} = (a, b, c)$ y $\overline{p_0} = (x_0,\ y_0,\ z_0)$, entonces:
$\bar{p} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c)$; $\bar{p} = (x_0, y_0, z_0) + t(a, b, c) = (x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc)$; $t \in R$

Si separamos las componentes x, y, z del vector $\bar{p}$, obtendremos las ecuaciones paramétricas de la línea recta, es decir:

$$\mathbf{L}: \begin{cases} \mathbf{x = x_0 + \ ta} \\ \mathbf{y = y_0 + \ tb} \\ \mathbf{z = z_0 + \ tc} \end{cases} ;\ \mathbf{t \in R}$$

Ecuaciones cartesianas en forma simétrica.

Despejando de las tres ecuaciones anteriores al parámetro "t", e igualando el resultado de los tres despejes, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}} \right.$$

Que se conocen como, ecuaciones cartesianas en forma simétrica de la línea recta "L".

Si una de las componentes del vector $\bar{u}$ es cero, se deben expresar las ecuaciones de la siguiente manera:
1) Si el vector $\bar{u} = (0, b, c)$, entonces: $\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{x = x_0},\ \mathbf{\frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}} \right.$
2) Si el vector $\bar{u} = (a, 0, c)$, entonces: $\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{y = y_0},\ \mathbf{\frac{x-x_0}{a} = \frac{z-z_0}{c}} \right.$
3) 1) Si el vector $\bar{u} = (a, b, 0)$, entonces: $\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{z = z_0},\ \mathbf{\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b}} \right.$

Si dos de las componentes del vector $\bar{u}$ son nulas, se tienen las siguientes ecuaciones:
1) Si el vector $\bar{u} = (0,0, c)$, entonces: $\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{x = x_0},\ \mathbf{y = y_0},\ \mathbf{z \in R} \right.$
2) Si el vector $\bar{u} = (0, b, 0)$, entonces: $\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{x = x_0},\ \mathbf{z = z_0},\ \mathbf{y \in R} \right.$
3) Si el vector $\bar{u} = (a, 0,0)$, entonces: $\mathbf{L}: \left\{ \mathbf{y = y_0},\ \mathbf{z = z_0},\ \mathbf{x \in R} \right.$

Ecuaciones cartesianas en forma general.

La intersección de dos planos en el espacio de tres dimensiones, da como resultado una línea recta, la cual se representa de la siguiente manera:

$$\mathbf{L}:\begin{cases}\mathbf{A_1X+\ B_1Y+\ C_1Z+\ D_1=0}\\ \mathbf{A_2X+\ B_2Y+\ C_2Z+\ D_2=0}\end{cases}$$

donde:
$A_1, B_1, C_1, D_1, A_2, B_2, C_2, D_2\ \in R$.

Ejemplo 1.
Dados los puntos P(1,0,-3) y Q(-2,1,7), obtener:
a) La ecuación vectorial de la línea recta
b) Las ecuaciones paramétricas
c) Las ecuaciones cartesianas en forma simétrica

Solución:
Se necesita de un punto y de la dirección de la recta, para formar su ecuación vectorial, considerando al punto P y la dirección del segmento $\overline{\mathrm{PQ}}$:

a) $\overline{\mathrm{PQ}}=(-3,1,10),\ \therefore\ \bar{\mathrm{p}}=(1,0,-3)+\mathrm{t}(-3,1,10);\ \bar{\mathbf{p}}=(\mathbf{1-3t},\mathbf{t},\mathbf{-3+10t})$

b) $\mathbf{L}:\begin{cases}\mathbf{x=1-3t}\\ \mathbf{y=t} & ;\mathbf{t}\ \in\mathbf{R}\\ \mathbf{z=-3+10t}\end{cases}$

c) $\mathbf{L}:\left\{\frac{\mathbf{x-1}}{\mathbf{-3}}=\mathbf{y}=\frac{\mathbf{z+3}}{\mathbf{10}}\right.$

Ejemplo 2.
Para las ecuaciones cartesianas en forma general de la recta L,

$$\mathbf{L}:\begin{cases}\mathbf{x-2y+z-4=0}\\ \mathbf{2x+4y-6z+8=0}\end{cases}$$

obtener:
a) La ecuación vectorial de la línea recta
b) Las ecuaciones paramétricas
c) Las ecuaciones cartesianas en forma simétrica

Primero debemos obtener dos puntos pertenecientes a ambos planos (por consiguiente a la línea recta), con lo que formaremos el segmento dirigido o "vector director" de la recta L.
Para ello asignamos un valor constante (asignación arbitraria) a una de las variables y resolvemos el sistema de ecuaciones resultante de orden 2 (de dimensión 2x2).

Encontrando el primer punto de la recta L:
Si Z=0:
x -2y = 4
2x+4y = -8

Resolviendo el sistema, encontramos que x=0, y=-2; por lo tanto encontramos el primer punto que pertenece a ambos planos de coordenadas **P(0,-2,0)**.

Encontrando el segundo punto de la recta L:
Si x=2:
-2y + z = 2
4y - 6z = -12

Resolviendo el sistema, encontramos que y=0, z=2; por lo tanto encontramos el segundo punto que pertenece a ambos planos de coordenadas **Q(2,0,2)**.

El segmento dirigido que indica la dirección de la recta L, es por lo tanto:

$$\overline{\mathbf{PQ}} = (\mathbf{2}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$$

Tomando cualquiera de los puntos anteriormente encontrados (P o Q), mas el vector director ($\overline{\mathbf{PQ}}$) multiplicado por un escalar, podemos formar la recta en su forma vectorial.

a) $\bar{\mathrm{p}} = (0, -2, 0) + \mathrm{t}(2,2,2)$; $\bar{\mathbf{p}} = (\mathbf{2t}, -\mathbf{2} + \mathbf{2t}, \mathbf{2t})$

b) $\mathbf{L}: \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{2t} \\ \mathbf{y} = -\mathbf{2} + \mathbf{2t}\ ; \mathbf{t}\ \in \mathbf{R} \\ \mathbf{z} = \mathbf{2t} \end{cases}$

c) $\mathbf{L}: \left\{ \frac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{y+2}}{\mathbf{2}} = \frac{\mathbf{z}}{\mathbf{2}} \right.$

Nota:
Las ecuaciones que representan a un línea recta, NO son únicas, ya que se puede seleccionar cualquier punto perteneciente a dicha recta y el vector director puede tener cualquier sentido y magnitud.

Distancia entre un punto y una recta

De la figura 7.1.:

$$\mathrm{sen}\theta = \frac{\mathrm{d}}{|\bar{\mathrm{q}} - \bar{\mathrm{p}}|};\ \mathrm{d} = |\bar{\mathrm{q}} - \bar{\mathrm{p}}|\mathrm{sen}\theta\ ; \mathrm{d} = \frac{|\bar{\mathrm{q}} - \bar{\mathrm{p}}||\bar{\mathrm{u}}|\mathrm{sen}\theta}{|\bar{\mathrm{u}}|}$$

$$\text{Pero: } |\bar{\mathrm{q}} - \bar{\mathrm{p}}||\bar{\mathrm{u}}|\mathrm{sen}\theta = |(\bar{\mathrm{q}} - \bar{\mathrm{p}})\mathrm{x}\bar{\mathrm{u}}|$$

$$\text{Entonces: } \mathbf{d} = \frac{|(\bar{\mathbf{q}} - \bar{\mathbf{p}})\mathbf{x}\bar{\mathbf{u}}|}{|\bar{\mathbf{u}}|}\ ;\ \mathbf{d} = \frac{|(\overline{\mathbf{PQ}})\mathbf{x}\bar{\mathbf{u}}|}{|\bar{\mathbf{u}}|}$$

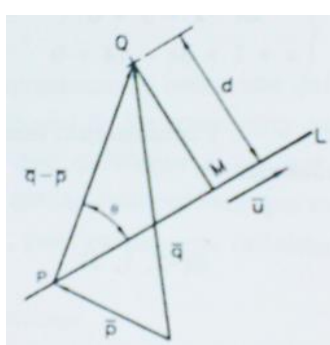


Figura 7.1. Distancia entre un punto y una recta

7.2 Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre rectas, Ángulo entre dos rectas. Distancia entre dos rectas. Intersección entre dos rectas.

Ángulo entre rectas

El ángulo que forman dos líneas rectas en el espacio tridimensional, es el ángulo que forman sus respectivos vectores directores $\overline{u_1}$ y $\overline{u_2}$, y se calcula como:

$$\boldsymbol{\theta = \mathrm{ang}\cos\frac{\overline{u_1}\cdot\overline{u_2}}{|\overline{u_1}||\overline{u_2}|}}$$

Condición de perpendicularidad, paralelismo y coincidencia.

Perpendicularidad
Dos rectas son perpendiculares, si y sólo si su producto escalar entre sus respectivos vectores directores es igual a cero, es decir:

$$\boldsymbol{\overline{u_1}\cdot\overline{u_2} = 0}$$

Paralelismo
Dos rectas son paralelas, si y sólo si el producto vectorial entre sus respectivos vectores directores es igual al vector cero, o bien, que el módulo del producto cruz entre los vectores directores, sea igual a cero.

$$\boldsymbol{\overline{u_1}\ \mathrm{x}\ \overline{u_2} = \overline{0}\ ;\ |\overline{u_1}\ \mathrm{x}\ \overline{u_2}| = 0}$$

Nota: Si las componentes de los vectores directores de dos rectas distintas, son proporcionales, entonces las rectas son paralelas.

Coincidencia
Si dos rectas L_1 y L_2 son paralelas y además un punto cualquiera P(x,y,z) de L_1, pertenece también a L_2, entonces las rectas son coincidentes (ocupan el mismo lugar geométrico).

Distancia entre dos rectas

Es la mínima longitud que existe entre ambas rectas, medida sobre una perpendicular común, cuya dirección está indicada por el producto cruz de los vectores directores.

Sea L una recta que contiene al punto P_L y R una recta que contiene al punto P_R, si unimos los dos puntos de ambas rectas, se forma el segmento dirigido $\overline{P_L P_R}$ (o $\overline{P_R P_L}$).

La distancia mínima, se calcula como el valor absoluto de la componente escalar del segmento $\overline{P_L P_R}$ sobre un vector $\overline{u}$ simultáneamente ortogonal a ambas rectas ($\boldsymbol{\overline{u} = \overline{u_L}\ \mathrm{x}\ \overline{u_R}}$), es decir:

$$\boldsymbol{d = \frac{|\overline{P_L P_R}\cdot(\overline{u_L}\ \mathrm{x}\ \overline{u_R})|}{|\overline{u_L}\ \mathrm{x}\ \overline{u_R}|}}$$

Nota: Si las rectas son paralelas, se mide la distancia de una de ellas a un punto cualquiera de la otra recta, por lo tanto deberá utilizarse la fórmula de "distancia de un punto a una recta" anteriormente vista.

Intersección entre dos rectas

Si la distancia entre las rectas es igual a cero, y el ángulo que forman ambas rectas es diferente de 0° o de 180°, entonces existe un punto de intersección entre las rectas.
Si la distancia es cero y el ángulo es 0° o 180°, las rectas son coincidentes.

No existe una expresión para calcular el punto de intersección, una metodología propuesta es la que se enuncia a continuación.

Sean las rectas:

$$\mathbf{L}: \begin{cases} \mathbf{x = x_L + \alpha a} \\ \mathbf{y = y_L + \alpha b} \\ \mathbf{z = z_L + \alpha c} \end{cases} ;\ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbf{R}\ \mathbf{;}\ \mathbf{R}: \begin{cases} \mathbf{x = x_R + \beta d} \\ \mathbf{y = y_R + \beta e} \\ \mathbf{z = z_R + \beta f} \end{cases} ;\ \boldsymbol{\beta} \in \mathbf{R}$$

El punto de intersección debe satisfacer simultáneamente las ecuaciones de ambas rectas, por lo tanto se pueden igualar ambas ecuaciones para las componentes x, y, z, quedando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{gathered} \mathbf{x_L + \alpha a = x_R + \beta d} \\ \mathbf{y_L + \alpha b = y_R + \beta e} \\ \mathbf{z_L + \alpha c = z_R + \beta f} \end{gathered}$$

El sistema anterior, es un sistema de 3 ecuaciones con 2 incógnitas, el cual tiene solución única, o no presenta solución.

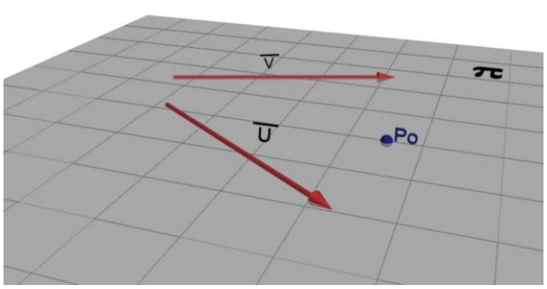
Si se resuelve el sistema para dos de las ecuaciones y los valores de α y β, satisfacen la tercera ecuación, entonces los valores de α y β, son la solución del sistema y sustituidos en las ecuaciones de L y R, nos darán el mismo punto de intersección.

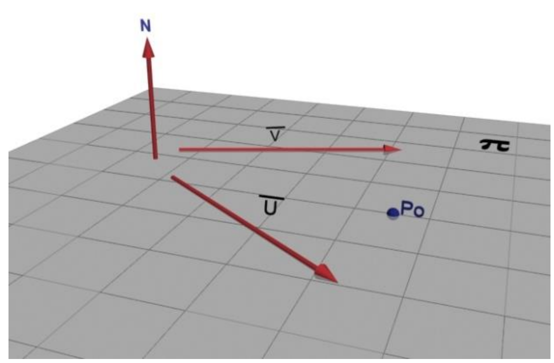
7.3 Ecuación vectorial, ecuaciones paramétricas y ecuación cartesiana del plano.

El plano

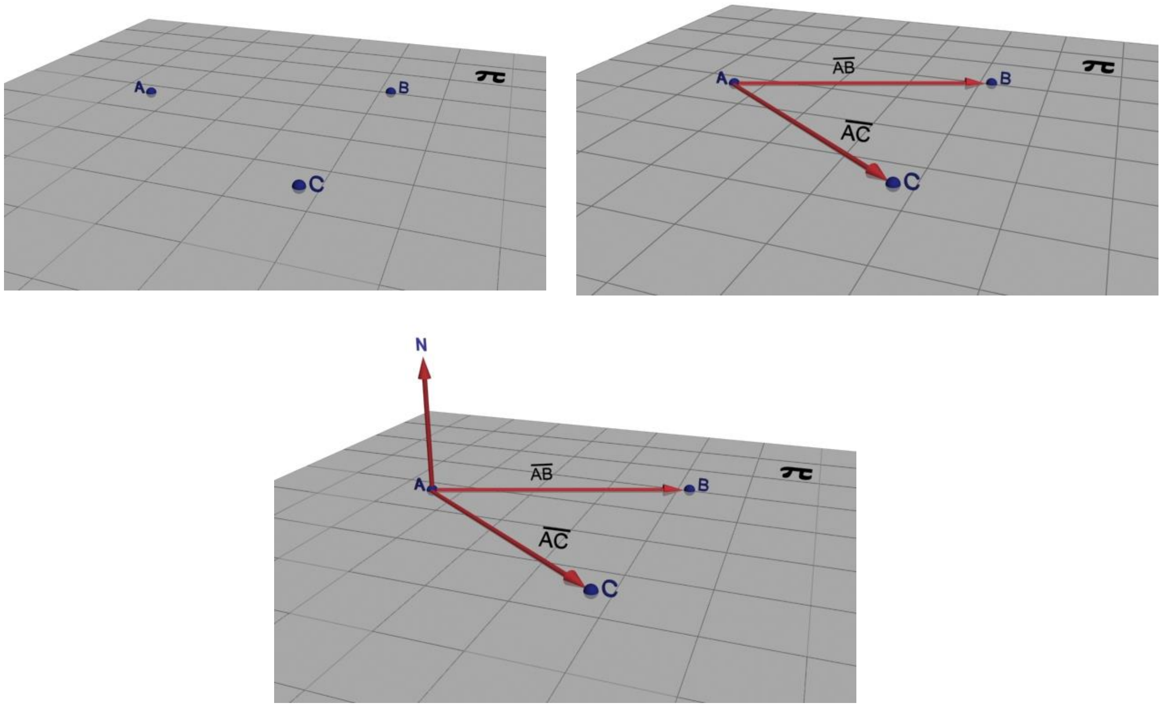
Un plano se puede definir geométricamente a través de alguna de las siguientes maneras:

a) Un punto y dos vectores NO paralelos

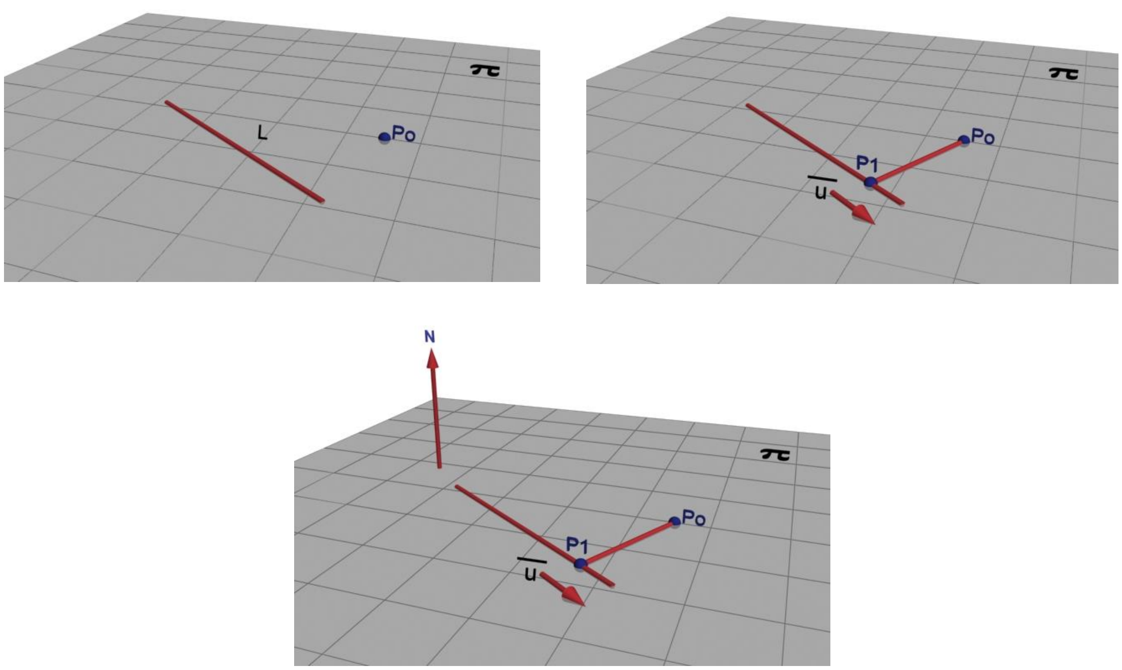




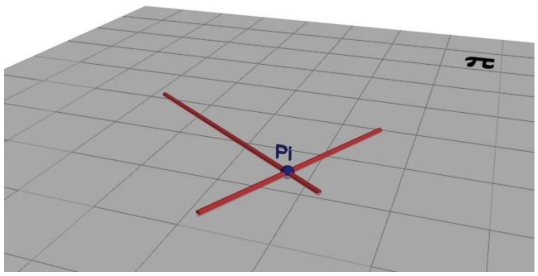
b) Tres puntos no alineados

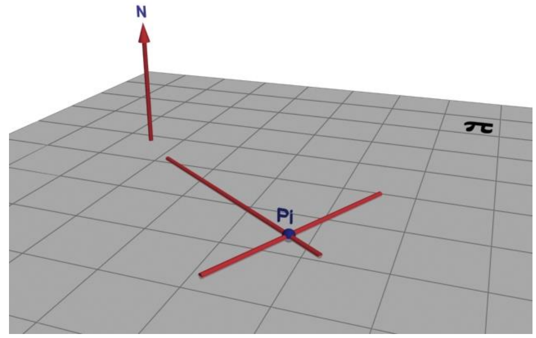


c) Una recta contenida en él y un punto del plano que NO pertenezca a la recta

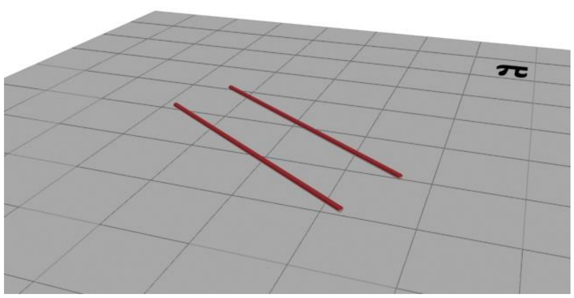


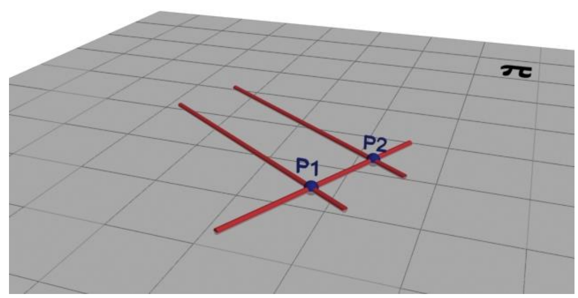
d) **Dos rectas que se cortan, contenidas en el plano**

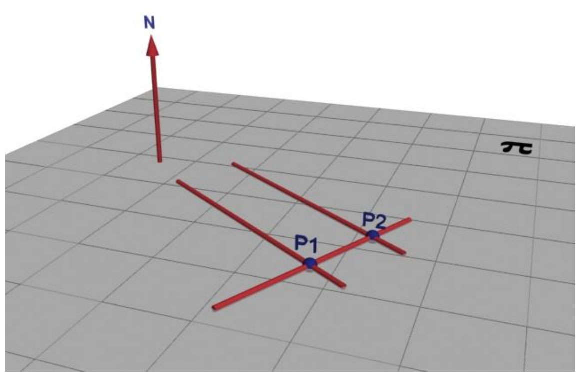




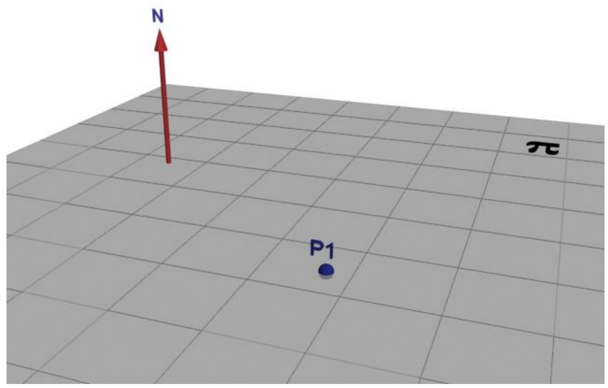
e) **Dos rectas paralelas, que pertenezcan al plano**







f) Un punto del plano, y un vector perpendicular al plano.



Representaciones analíticas del plano

Existen distintas maneras de representar analíticamente un plano, este puede representarse a través de su ecuación vectorial, de sus ecuaciones paramétricas y de su ecuación cartesiana.

Ecuación vectorial

$$\overline{\mathbf{p}} = \overline{\mathbf{p_0}} + \mathbf{s}\overline{\mathbf{u}} + \mathbf{t}\overline{\mathbf{v}} \quad ; \quad \mathbf{s}, \mathbf{t} \in \mathbf{R}$$

Ecuaciones paramétricas

$$\boldsymbol{\pi}: \begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{x_0} + \mathbf{s}\mathbf{u_x} + \mathbf{t}\mathbf{v_x} \\ \mathbf{y} = \mathbf{y_0} + \mathbf{s}\mathbf{u_y} + \mathbf{t}\mathbf{v_y} \\ \mathbf{z} = \mathbf{z_0} + \mathbf{s}\mathbf{u_z} + \mathbf{t}\mathbf{v_z} \end{cases}$$

Ecuación normal

$$(\overline{\mathbf{p}} - \overline{\mathbf{p_0}}) \cdot \overline{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$$

Ecuación cartesiana

AX+BY+CZ+D=0; donde: $\overline{\mathbf{N}} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C})$ y $\mathbf{D} = -\mathbf{A}\mathbf{X_0} - \mathbf{B}\mathbf{Y_0} - \mathbf{C}\mathbf{Z_0} = -(\overline{\mathbf{N}} \cdot \overline{\mathbf{P_0}})$

7.4. Distancia entre un plano y un punto

$$\mathbf{d} = \frac{|(\overline{\mathbf{q}} - \overline{\mathbf{p_0}}) \cdot \overline{\mathbf{N}}|}{|\overline{\mathbf{N}}|}$$

Ángulo entre planos

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{ang}\cos\frac{\overline{\mathbf{N_1}} \cdot \overline{\mathbf{N_2}}}{|\overline{\mathbf{N_1}}|\,|\overline{\mathbf{N_2}}|}$$

7.5 Condición de perpendicularidad y condición de paralelismo entre planos.

Ortogonalidad entre planos

$$\overline{\mathbf{N_1}} \cdot \overline{\mathbf{N_2}} = \mathbf{0}$$

Paralelismo entre planos

$$\overline{\mathbf{N_1}}\,\mathbf{x}\,\overline{\mathbf{N_2}} = \overline{\mathbf{0}}$$

7.6 Distancia entre dos planos.

Distancia entre planos

$$\mathbf{d} = \frac{|(\overline{\mathbf{q}} - \overline{\mathbf{p_0}}) \cdot \overline{\mathbf{N}}|}{|\overline{\mathbf{N}}|}$$

7.7 Intersección entre planos.

Intersección entre planos
La intersección de dos planos da como resultado una línea recta. El vector director de la recta se obtiene con el producto cruz de los vectores normales. Para obtener un punto que pertenezca a la recta, se asigna un valor arbitrario a una literal y se resuelve el sistema de orden dos.

7.8 Ángulo entre una recta y un plano.

Ángulo entre un plano y una recta

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{ang}\,\mathbf{sen}\frac{\overline{\mathbf{N}} \cdot \overline{\mathbf{U}}}{|\overline{\mathbf{N}}|\,|\overline{\mathbf{U}}|}$$

7.9 Condición de paralelismo y condición de perpendicularidad entre una recta y un plano.

Ortogonalidad entre una recta y un plano

$$\bar{\mathbf{N}} \, \mathbf{x} \, \bar{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{0}}$$

Paralelismo entre una recta y un plano

$$\bar{\mathbf{N}} \cdot \bar{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$$

7.10 Intersección de una recta con un plano.

Intersección entre una recta y un plano
Se sustituyen las ecuaciones paramétricas de la recta en la ecuación cartesiana del plano para determinar el valor del parámetro de la recta, si este existe, entonces si hay intersección, en caso contrario se deberá calcular la distancia del plano a la recta, como la distancia de un punto de la recta al plano.

7.11 Distancia entre una recta y un plano.

Si no se intersectan la recta y el plano, quiere decir que son paralelos, basta con tomar un punto de la recta y calcular su distancia respecto al plano, esto es:

$$\mathbf{d} = \frac{|(\bar{\mathbf{q}} - \overline{\mathbf{p_0}}) \cdot \bar{\mathbf{N}}|}{|\bar{\mathbf{N}}|}$$