Capítulo VI. Álgebra vectorial

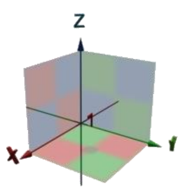
Objetivo: El alumno aplicará el álgebra vectorial en la resolución de problemas geométricos.

Contenido:

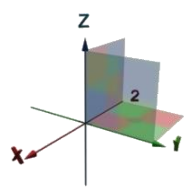
6.1. Cantidades escalares y cantidades vectoriales. Definición de segmento dirigido. Componentes escalares.
6.2. Concepto de vector como terna ordenada de números reales, módulo de un vector, igualdad entre vectores, vector nulo y unitario, vectores unitarios i, j, k.
6.3 Operaciones con vectores: adición y sustracción de vectores.
6.4. Multiplicación de un vector por un escalar. Propiedades de las operaciones.
6.5. Producto escalar y propiedades.
6.6. Condición de perpendicularidad entre vectores.
6.7. Componente escalar y componente vectorial de un vector en la dirección de otro.
6.8. Ángulo entre dos vectores y cosenos directores.
6.9. Producto vectorial, interpretación geométrica y propiedades.
6.10. Condición de paralelismo entre vectores.
6.11. Aplicación del producto vectorial al cálculo del área de un paralelogramo. Producto mixto e interpretación geométrica.
6.12. Curvas en el espacio. Representación cartesiana, paramétrica y vectorial.
6.13. Representación cartesiana, paramétrica y vectorial de las cónicas.

Sistema cartesiano tridimensional

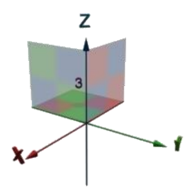
Se divide en ocho octantes, cuatro superiores y cuatro inferiores.



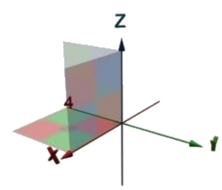
Primer octante
P (X, Y, Z)



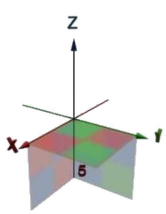
Segundo octante
P (-X, Y, Z)



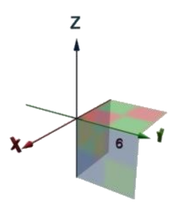
Tercer octante
P (-X,-Y, Z)



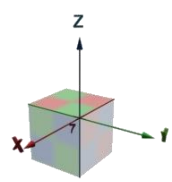
Cuarto octante
P (X,-Y, Z)



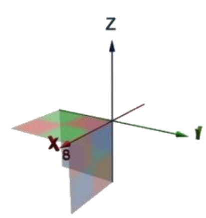
Quinto octante
P (X, Y,-Z)



Sexto octante
P (-X, Y,-Z)



Séptimo octante
P (-X,-Y,-Z)

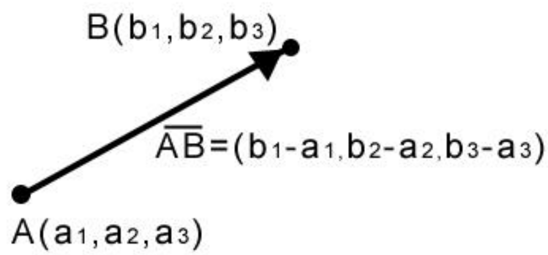


Octavo octante
P (X,-Y,-Z)

6.1. Cantidades escalares y cantidades vectoriales. Definición de segmento dirigido. Componentes escalares

Cantidades $\begin{cases} \text{Escalares: magnitud} \\ \text{Vectoriales: magnitud y dirección (sentido)} \end{cases}$

Representación geométrica de un vector
Se realiza a través de un segmento dirigido

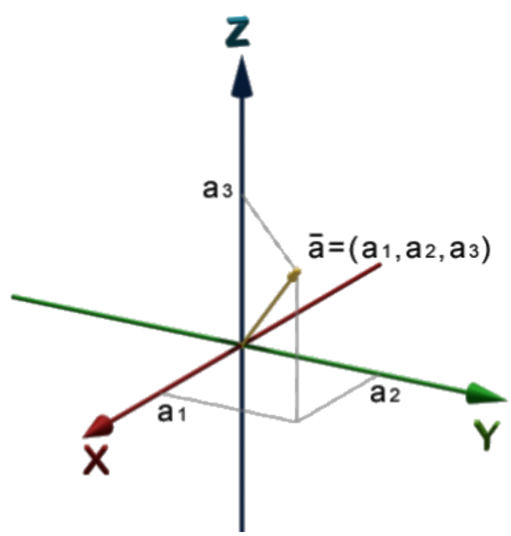


Ejemplo: Determinar el valor del vector representado por el segmento dirigido $\overline{AB}$, si se conocen los puntos A(3,2,1) y B(-5,7,9).

$$\overline{AB}=(-5-3,\ 7-2,\ 9-1)=(-8,\ 5,\ 8)$$

Componentes escalares de un segmento dirigido sobre los ejes coordenados

Un vector en el espacio de coordenadas cartesianas tridimensional queda definido analíticamente a través de una terna ordenada de números, que representan las proyecciones del vector sobre los ejes X, Y y Z respectivamente.



6.2. Concepto de vector como terna ordenada de números reales, módulo de un vector, igualdad entre vectores, vector nulo y unitario, vectores unitarios i, j, k

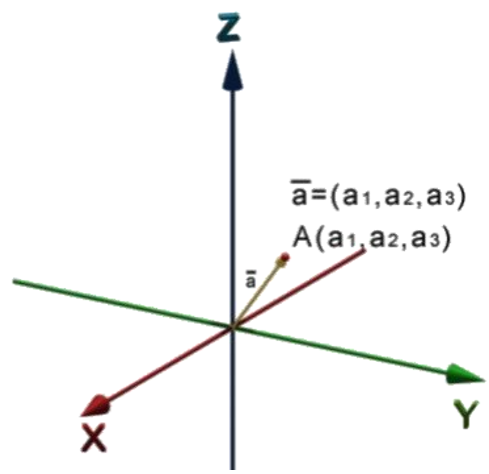
El vector como terna ordenada de números reales

Un vector pude tener más de tres dimensiones, aunque su representación geométrica quede limitada a los vectores tridimensionales.
Para un vector $\overline{a}$ de dimensión n tenemos que: $\overline{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Vector de posición

Para el punto A de coordenadas $A(a_1,a_2,a_3)$, perteneciente al espacio cartesiano tridimensional, su vector de posición será el vector $\overline{a} = (a_1, a_2, a_3)$, formado por la misma terna de números del punto que representa.

Cualquier punto siempre tendrá su representación vectorial a través de su VECTOR DE POSICIÓN.



Módulo de un vector

Al hablar de módulo, nos referimos a la magnitud o tamaño del vector.

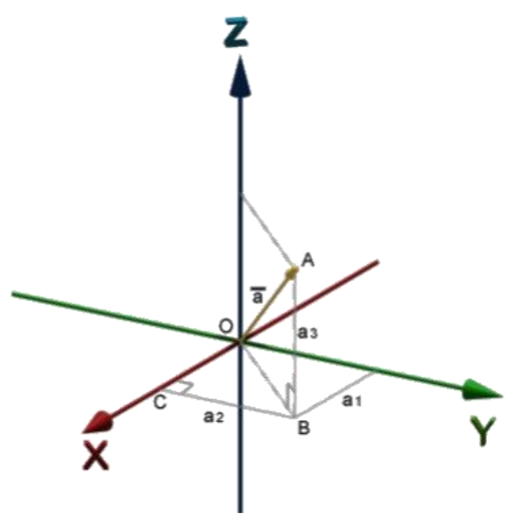
Si tomamos como referencia la figura de la derecha, al aplicar el teorema de Pitágoras sobre el triángulo rectángulo **OCB** contenido en el plano XY, tenemos que:

$$\overline{OB}^2 = \overline{OC}^2 + \overline{CB}^2 = a_1^2 + a_2^2$$

Posteriormente al aplicar el mismo teorema sobre el triángulo OBA, tenemos:

$$\left|\overline{a}\right| = \overline{OA} = \sqrt{\overline{OB}^2 + \overline{AB}^2} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$

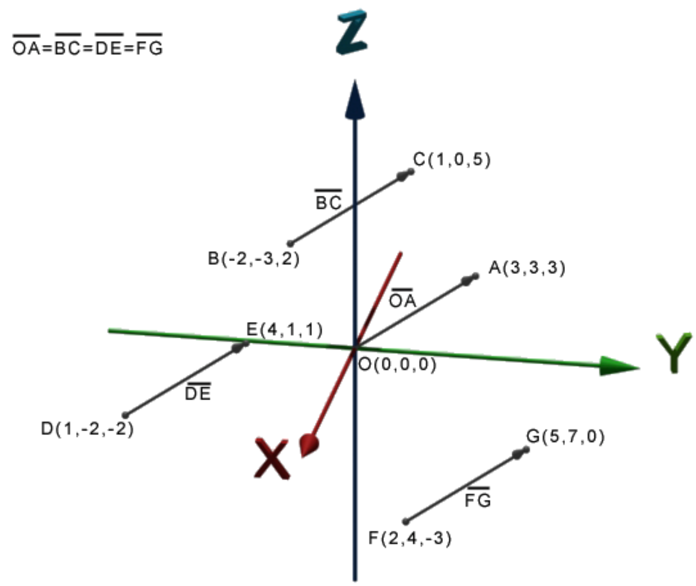
$$\therefore \left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$$



Ejemplo: Demostrar que los puntos A(7, 5), B(2, 3) y C(6,-7) son los vértices de un triángulo rectángulo.

Igualdad de vectores

Dos o más vectores son iguales, si tienen la misma magnitud y dirección.
Un vector no se altera si se mueve paralelamente a sí mismo, como se muestra en la siguiente figura.



Vector nulo

$\bar{0}$ =(0, 0, …, 0) (Vector nulo o vector cero)

Vector unitario

Para un vector cualquiera $\bar{a}$ = (a_1, a_2, …, a_n) el vector unitario de a estará dado por:

$$\bar{a}\,u = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \ldots, \frac{a_n}{|\bar{a}|}\right) = \frac{1}{|\bar{a}|}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

Para un vector en el espacio de tres dimensiones, tenemos:

$$\bar{a}\,u = \left(\frac{a_1}{|\bar{a}|}, \frac{a_2}{|\bar{a}|}, \frac{a_3}{|\bar{a}|}\right) = \frac{1}{|\bar{a}|}(a_1, a_2, a_3)$$

$\bar{a}$ y $\bar{a}$ u tienen la misma dirección y sentido ya que $\frac{1}{|\bar{a}|} > 0$

Ejemplo:
Obtener el vector unitario del vector $\bar{a}$:
Si $\bar{a} = (-4, 2\sqrt{2}, -1)$.

$$|\bar{a}| = \sqrt{(-4)^2 + (2\sqrt{2})^2 + (-1)^2} = \sqrt{16+8+1} = \sqrt{25} = 5 \quad \therefore \bar{a}\,u = \left(\frac{-4}{5}, \frac{2\sqrt{2}}{5}, \frac{-1}{5}\right)$$

Vectores unitarios i, j y k

$\hat{\imath} = (1,0,0)$, $\hat{\jmath} = (0,1,0)$, $\hat{k} = (0,0,1)$ son los vectores unitarios en dirección de los ejes X, Y y Z respectivamente. El vector $\bar{a}$= (a_1, a_2, a_3), se puede representar en su forma trinómica como: $\bar{a}=a_1\hat{\imath} + a_2\hat{\jmath} + a_3\hat{k}$

6.3 Operaciones con vectores: adición y sustracción de vectores.

Operaciones con vectores

Podemos realizar las siguientes operaciones sobre cualquier vector de dimensión n.

1. Adición y sustracción.
2. Multiplicación por un escalar.
3. Producto escalar (punto).
4. Producto vectorial (Cruz).
5. Producto mixto.

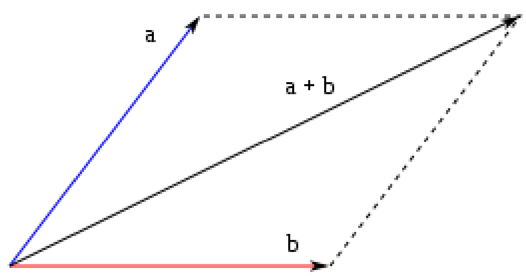
Adición y sustracción de vectores

Sean los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, el vector $\bar{a} + \bar{b}$ se obtiene sumando de forma ordenada cada una de las componentes de los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

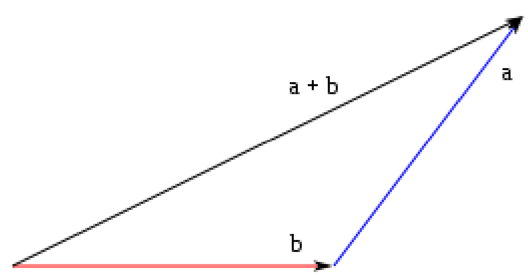
$$\bar{a} + \bar{b} = (a_{1}+ b_1, a_{2}+ b_2, \ldots, a_n + b_n)$$

Para poder realizar la adición o sustracción de vectores éstos deben ser de las mismas dimensiones.

Interpretación geométrica de la suma y diferencia de vectores



Método del paralelogramo



Método del triángulo

6.4. Multiplicación por un escalar

Si $\lambda \in R$, entonces $\lambda \bar{a} = \lambda(a_1, a_2, \ldots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n)$

Propiedades de la multiplicación por un escalar
Si λ_1 y $\lambda_2 \in R$ y $\bar{a}$, $\bar{b}$ son de la misma dimensión:
1) $\lambda_1(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_1 \bar{b}$
2) $(\lambda_1 + \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1 \bar{a} + \lambda_2 \bar{a}$
3) $(\lambda_1 \lambda_2)\bar{a} = \lambda_1 (\lambda_2 \bar{a})$
4) $|\lambda_1 \bar{a}| = |\lambda_1| \cdot |\bar{a}|$
5) $0\bar{a} = \bar{0}$; $1\bar{a} = \bar{a}$; $-1\bar{a} = -\bar{a}$; $-\bar{0} = \bar{0}$

Si $\lambda>1$: Vector paralelo con la misma dirección y de mayor tamaño
Si $0<\lambda<1$: Vector paralelo con la misma dirección y de menor tamaño
Si $-1<\lambda<0$: Vector paralelo con dirección opuesta y de menor tamaño
Si $\lambda<-1$: Vector paralelo con dirección opuesta y de mayor tamaño

6.5. Producto escalar de dos vectores

Sean los vectores $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ y $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$

$$\bar{a} \bullet \bar{b} = \sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

Propiedades del producto escalar

Dados los vectores a, b y c y el escalar λ, se cumple que:

1. $\bar{a} \bullet \bar{b} = \bar{b} \bullet \bar{a}$
2. $\bar{a} \bullet (\overline{b} + \overline{c}) = \bar{a} \bullet \bar{b} + \bar{a} \bullet \bar{c}$
3. $(\lambda \overline{a}) \bullet \bar{b} = \lambda(\bar{a} \bullet \bar{b})$
4. $\bar{a} \cdot \bar{a} > 0;\ Si\ \bar{a} \neq \bar{0}\ ;\quad \bar{a} \cdot \bar{a} = |\bar{a}|^2$

6.6. Condición de perpendicularidad entre vectores

Dos vectores a y b son ortogonales si y sólo si $\bar{a} \bullet \bar{b} = 0$

Ejemplo: Determinar si los vectores dados en cada inciso son ortogonales.

a) $\bar{u} = (5, 0, -4),\ \bar{v} = (4, -3, 5)$
b) $\bar{a} = (4, 2, -2),\ \bar{b} = (8, 0, 10)$
c) $\bar{n} = (2, 1, -1),\ \bar{p} = (-1, \frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$

6.7. Componente escalar y vectorial de un vector sobre otro

$$C.E._{\bar{a}\ \bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}$$

$$C.V._{\bar{a}\ \bar{b}} = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}\left(\frac{\bar{b}}{|\bar{b}|}\right) = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{b}|}\ \bar{b}_u$$

6.8. Ángulo entre dos vectores

$$\cos\theta = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|}\ ;donde\ 0° \leq \theta \leq 180°$$

Ejemplo:

Ángulos y cosenos directores de un vector

Los ángulos directores de un vector $\bar{a}$, son los ángulos α, β y γ que respectivamente forma el vector a con los vectores unitarios $\hat{\imath}$, $\hat{\jmath}$ y $\hat{k}$.

$$\alpha = ang\cos\frac{a_1}{|\bar{a}|}\ ,\ \beta = ang\cos\frac{a_2}{|\bar{a}|}\ ,\ \gamma = ang\cos\frac{a_3}{|\bar{a}|}$$

Cosenos directores

Son los cosenos de los ángulos directores.

$$cos\alpha = \frac{a_1}{|\bar{a}|}\ ,\ cos\beta = \frac{a_2}{|\bar{a}|}\ ,\ cos\gamma = \frac{a_3}{|\bar{a}|}\ ;\ \ además\ cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$$

6.9. Producto vectorial, interpretación geométrica y propiedades

Sólo es aplicable a pares de vectores

$$\bar{a}x\bar{b} = \begin{vmatrix} \hat{\imath} & \hat{\jmath} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{\imath} - (a_1b_3 - a_3b_1)\hat{\jmath} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k}$$

Al realizar el producto cruz se obtiene un tercer vector ortogonal a los vectores $\bar{a}$ y $\bar{b}$.

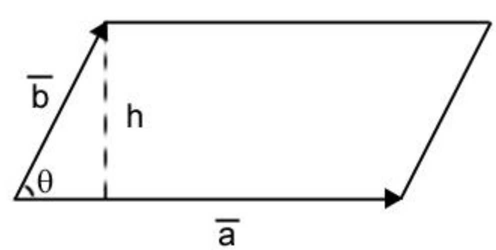
Propiedades del producto vectorial

1. $\bar{a}x\bar{b} = -(\bar{b}x\bar{a}).\ Anticonmutatividad$
2. $\bar{a}x(\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a}x\bar{b}) + (\bar{a}x\bar{c}).\ Distributiva\ por\ la\ izquierda$
3. $(\bar{b} + \bar{c})x\bar{a} = (\bar{b}x\bar{a}) + (\bar{c}x\bar{a}).\ Distributiva\ por\ la\ derecha$
4. $|\bar{a}x\bar{b}| = |\bar{a}||\bar{b}|\ sen\theta;\ 0° \leq \theta \leq 180°$

6.10. Condición de paralelismo entre vectores

$$|\bar{a}x\bar{b}| = 0$$

6.11. Aplicación del producto vectorial al cálculo del área de un paralelogramo. Producto mixto e interpretación geométrica



Producto mixto

Definición: dados tres vectores cualesquiera a b y c, el producto mixto se define como el escalar:

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \bar{a} \cdot \bar{b} x \bar{c}$$

Se cumple que el resultado del producto mixto no se altera al cambiar cíclicamente el orden de los vectores (se intercambian en el determinante los renglones un par de veces), esto es:

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \bar{a} \cdot \bar{b} x \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} x \bar{a} = \bar{c} \cdot \bar{a} x \bar{b}$$

Volumen de un paralelepípedo.

Se obtiene a través del producto mixto de tres vectores concurrentes en un mismo vértice y que son aristas del paralelepípedo.

$$[\bar{a} \quad \bar{b} \quad \bar{c}] = \bar{a} \cdot \bar{b} x \bar{c} = \bar{b} \cdot \bar{c} x \bar{a} = \bar{c} \cdot \bar{a} x \bar{b}$$

6.12. Curvas en el espacio, representación cartesiana, paramétrica y vectorial

Ecuación vectorial
La ecuación vectorial de una curva es una regla matemática que indica el desplazamiento de un vector de posición para que su extremo barra la curva en toda su longitud.

El parámetro permite realizar el barrido sobre toda la longitud de la curva.

Para representar vectorialmente a una curva, se requiere de un solo parámetro.
Para representar vectorialmente una superficie, se requieren de dos.

Matemáticamente, se define de manera vectorial a una curva de la siguiente manera:

$$C: \bar{r} = x(t)i + y(t)j + z(t)k$$

Ecuación paramétrica

$$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

Intervalo paramétrico
Es el conjunto de valores del parámetro (t), para los cuales está definido el vector $\bar{r}$.

$$Intervalo\ Paramétrico = \{t | t \in dx \ \cap dy \ \cap dz\}$$

Donde dx, dy y dz, son los dominios de las funciones x(t), y(t), z(t), respectivamente.

Ej. 1. Obtener la ecuación vectorial, las correspondientes paramétricas, el intervalo paramétrico y la ecuación cartesiana de la curva descrita por un punto cuya abscisa sea tres y su cota el doble del coseno de su ordenada.

Ej. 2. Obtener una ecuación vectorial, las correspondientes paramétricas, el intervalo paramétrico y la ecuación cartesiana de la curva descrita por un punto cuya ordenada sea el cuadrado de la suma de su abscisa más cuatro y su cota sea menos cinco.

$$C: \overline{r} = ti + (t+4)^2 j - 5\,k; \quad C: \begin{cases} x = t \\ y = (t+4)^2; t \in R; \\ z = -5 \end{cases} \quad z = -5, y = (x+4)^2$$

Ej. 3. Obtener una ecuación vectorial, las correspondientes paramétricas, el intervalo paramétrico y la ecuación cartesiana de la curva descrita por un punto cuya abscisa sea tres más o menos la raíz cuadrada de veinticinco menos el cuadrado de su cota y su ordenada sea 7.

$$C: \overline{r} = \left(3 \pm \sqrt{25 - t^2}\right) i + 7j + t\,k; \quad C: \begin{cases} x = 3 \pm \sqrt{25 - t^2} \\ y = 7 \\ z = t \end{cases}; -5 \leq t \leq 5; \quad x = 3 \pm \sqrt{25 - z^2}$$

Finalmente, la ecuación cartesiana queda como:

$$(x-3)^2 + z^2 = 25, Circunferencia\ C(3,7,0), r = 5$$

Ej. 4. Obtener una ecuación vectorial, las correspondientes paramétricas, el intervalo paramétrico y la ecuación cartesiana de la curva descrita por un punto cuya cota sea el doble de la suma de dos más o menos la raíz cuadrada de nueve menos el cuadrado de su ordenada y su abscisa sea 4.

$$C: \overline{r} = 4i + tj + 2\left(2 \pm \sqrt{9 - t^2}\right) k; \quad C: \begin{cases} x = 4 \\ y = t \\ z = 2\left(2 \pm \sqrt{9 - t^2}\right) \end{cases}; -3 \leq t \leq 3; \quad z = 2\left(2 \pm \sqrt{9 - y^2}\right)$$

Finalmente, la ecuación cartesiana queda como:

$$\frac{(z-4)^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1, Elipse\ C(4,0,4). Con\ a = 6, b = 3$$

6.13. Ecuaciones paramétricas y ecuación vectorial de las cónicas.

Circunferencia
Considerando una circunferencia de radio "r" y centro en C(h, k):

$$C: \begin{cases} (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2 \\ z = cte \end{cases}$$

$$\left(\frac{x-h}{r}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{r}\right)^2 = 1; Utilizando\ la\ identidad: sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\frac{x-h}{r} = sen\theta\ ; x = h + r\ sen\theta$$
$$\frac{y-k}{r} = cos\theta\ ; y = k + r\ cos\theta$$

Finalmente podemos escribir a la ecuación paramétrica como:

$$C: \begin{cases} x = h + r\ sen\theta \\ y = k + r\ cos\theta \\ z = cte \end{cases}$$

Elipse
Considerando la ecuación cartesiana de una elipse con centro en C(h, k), eje mayor paralelo al eje x, y paralela al plano xy :

$$C: \begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2} + \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ z = cte \end{cases}$$

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1; Utilizando\ la\ identidad: sen^2\theta + cos^2\theta = 1$$

$$\frac{x-h}{a} = sen\theta\ ; x = h + a\ sen\theta$$
$$\frac{y-k}{b} = cos\theta\ ; y = k + b\ cos\theta$$

Finalmente podemos escribir a la ecuación paramétrica como:

$$C: \begin{cases} x = h + a\ sen\theta \\ y = k + b\ cos\theta \\ z = cte \end{cases}$$

Hipérbola
Considerando la ecuación cartesiana de una hipérbola con centro en C(h, k), eje focal (transverso) paralelo al eje x, eje imaginario (conjugado) paralelo al eje y, y paralela al plano xy :

$$C: \begin{cases} \dfrac{(x-h)^2}{a^2} - \dfrac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \\ z = cte \end{cases}$$

$$\left(\frac{x-h}{a}\right)^2 - \left(\frac{y-k}{b}\right)^2 = 1; Utilizando\ la\ identidad: sec^2\theta - tan^2\theta = 1$$

$$\frac{x-h}{a} = sec\theta \,; x = h + a\, sec\theta$$
$$\frac{y-k}{b} = tan\theta \,; y = k + b\, tan\theta$$

Finalmente podemos escribir a la ecuación paramétrica como:

$$C: \begin{cases} x = h + a\, sec\theta \\ y = k + b\, tan\theta \\ \quad z = cte \end{cases}$$