Capítulo 5. Variación de funciones

Objetivo: El alumno analizará la variación de una función real de variable real para identificar las características geométricas de su gráfica y resolverá problemas de optimización.

Contenido:

5.1 Enunciado e interpretación geométrica de los teoremas de Weierstrass y Bolzano.
5.2. Enunciado e interpretación geométrica del teorema de Rolle.
5.3. Enunciado e interpretación geométrica del teorema del valor medio del cálculo diferencial.
5.4. Funciones crecientes y decrecientes y su relación con el signo de la derivada.
5.5. Máximos y mínimos relativos. Criterio de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada. Problemas de aplicación.
5.6. Análisis de la variación de una función.

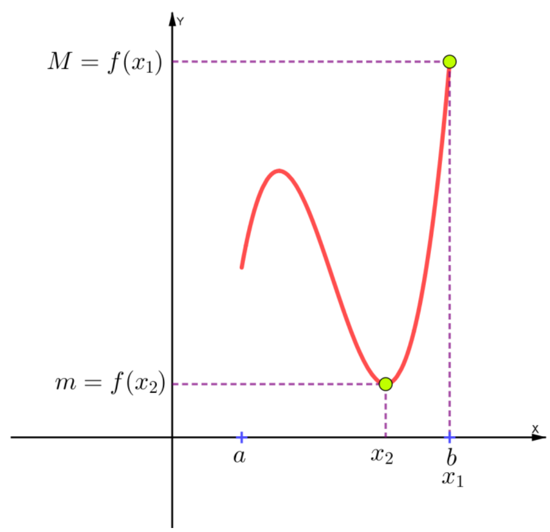
5.1. Enunciado e interpretación geométrica de los teoremas de Weierstrass y Bolzano.

Teorema de Weierstrass

Si una función y = f(x) es continua en el intervalo cerrado de [a , b] entonces:

Entre todos los valores de f(x) existe un valor $M = f(x_1)$ llamado el *Máximo Absoluto*, que no es superado por ningún otro valor de la función en [a , b].

De la misma forma existe un valor $m = f(x_2)$ llamado el *mínimo absoluto*, que no supera a ninguno de los valores de la función en [a , b].

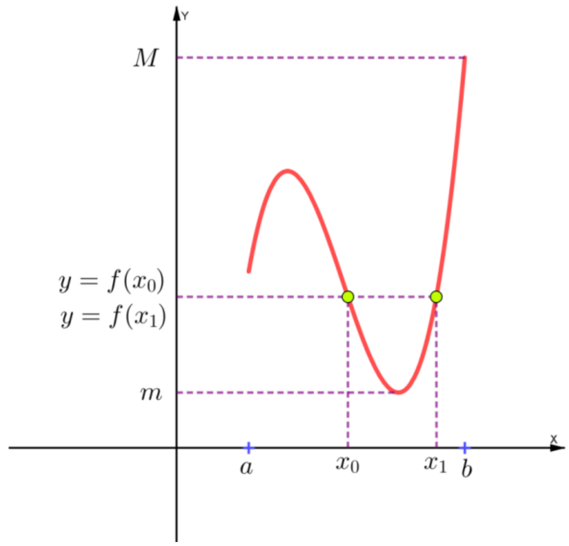


En esencia, el teorema de Weierstrass establece la existencia del máximo y mínimo absolutos, a partir de la continuidad de una función. Los valores, máximo y mínimo absoluto pueden estar en cualquier punto del dominio de la función, incluso en los extremos.

Teorema de Bolzano

Si una función y = f(x) es continua en el intervalo cerrado de [a , b] y un valor de la función es y_0 tal que se verifica que $m \leq y_0 \leq M$ entonces:

Existe al menos un valor $x_0 \in [a , b]$ para el cual $y_0 = f(x_0)$.



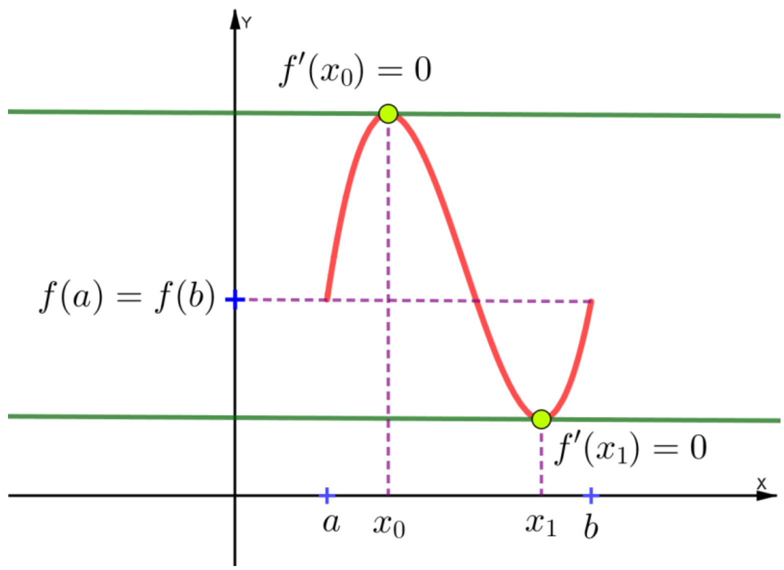
El teorema de Bolzano asegura la existencia de todos los valores de la función, entre el máximo y el mínimo absoluto, correspondiendo siempre a un valor x dentro del dominio de la función.

Teorema de Rolle

Si una función y = f(x) cumple con las siguientes condiciones:

1) Es continua en el intervalo cerrado [a ,b]
2) Es derivable en el intervalo abierto (a ,b)
3) y $f(a)$ = $f(b)$

Entonces, existe por lo menos un valor $x_0 \in (a\ ,\ b)$ para el cual $f'(x_0)$=0



Este teorema se emplea frecuentemente para encontrar los máximos y mínimos relativos de una función, pero su inconveniente es la exigencia en el cumplimiento de sus tres hipótesis.

Ej. Investigar si la función cumple las condiciones del teorema de Rolle. En caso afirmativo, determinar los valores para los cuales se verifica.

a. $y\ =\ x^3 - 2x + 3\ si\ x\ \in [-2\ ,2]$
b. $y\ =\ 4 - x^{\frac{2}{3}}\ si\ x\ \in [-3\ ,3]$
c. $y\ =\ |x - 2|\ si\ x\ \in [-2\ ,6]$
d. $y\ =\ -x^3 + 3x - 3\ si\ x\ \in [-2\ ,1]$
e. $y\ =\ 4 - 8x^2 + 2x^4\ si\ x\ \in [1, \sqrt{3}]$

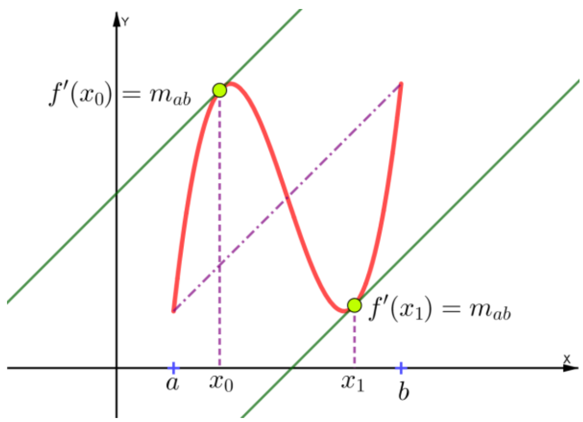
Teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial

Si y = f(x) cumple con las siguientes condiciones:

1) Es continua en el intervalo cerrado [a ,b]
2) Es derivable en el intervalo abierto (a ,b)

Entonces, existe por lo menos un valor $x_0 \in (a\ ,\ b)$ para el cual

$$f'(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



Ej. Investigar si la función cumple las condiciones del teorema del Valor Medio del Cálculo Diferencial. En caso afirmativo, determinar los valores para los cuales se verifica.

a. $y\ =\ x^3 - x\ si\ x\ \in [-2\ ,2]$
b. $y\ =\ \frac{2}{x}\ si\ x\ \in [-1\ ,2]$
c. $y\ =\ (x-2)^{\frac{2}{3}}\ si\ x\ \in [0\ ,3]$

5.4. Funciones crecientes y decrecientes y su relación con el signo de la derivada.

Curva creciente o decreciente en un intervalo

Una función es ***creciente*** si $\boldsymbol{f'(x_0) > 0}$
Una función es ***decreciente*** si $\boldsymbol{f'(x_0) < 0}$

5.5. Máximos y mínimos relativos. Criterio de la primera derivada. Concavidad y puntos de inflexión. Criterio de la segunda derivada. Problemas de aplicación.

Una función presenta un ***máximo o mínimo relativo*** si $\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$**.** Cuando la pendiente es nula ($\boldsymbol{f'(x_0) = 0}$) se obtiene una tangente horizontal, lo que implica que en el punto x_0, se presenta un cambio en la característica creciente (decreciente) función. Todos los puntos que cumplan con $\boldsymbol{f'(x) = 0}$**,** se conocen como **puntos críticos.**

Criterio de la primera derivada

$$\boldsymbol{f'(x)}\begin{cases} Positiva \rightarrow Creciente \\ Negativa \rightarrow Decreciente \\ Nula \rightarrow Máximo\ o\ mínimo \end{cases}$$

Concavidad de una curva

Una curva es *cóncava hacia arriba* si $\boldsymbol{f''(x_0) > 0}$
Una curva es *cóncava hacia abajo* si $\boldsymbol{f''(x_0) < 0}$

Puntos de inflexión

Una curva presenta un *punto de inflexión* si $\boldsymbol{f''(x_0) = 0}$

Criterio de la segunda derivada

$$\boldsymbol{f''(x)}\begin{cases} Positiva \rightarrow Cóncava\ hacia\ arriba \\ Negativa \rightarrow Cóncava\ hacia\ abajo \\ Nula \rightarrow Punto\ de\ inflexión \end{cases}$$

5.6. Análisis de la variación de una función.

Para analizar por completo una función, es necesario aplicar los conceptos de la primera y segunda derivada.

Ej. $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 10$

Ej. $y = 5x^2 + 2x - 3$

Ej. $y = 1 + x^{\frac{2}{3}}$

Ej. $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x + 4$

Ej. $y = x^3 - \frac{3}{2}x^2\ si\ x\ \in [-1,3]$

Problemas de optimización

Metodología:

1. Escribir una función que modele al problema, a esta función usualmente se le conoce como “función objetivo”
2. Escribir una ecuación auxiliar, usualmente llamada “ecuación de condición”
3. Despejar una de las variables de la ecuación de condición y sustituirla en la función objetivo
4. Dejar a la función objetivo con una sola variable y aplicar los criterios de primera y segunda derivada a esta función
5. Con la primera derivada igualada a cero, se obtendrán los puntos críticos
6. Sustituir los puntos críticos en la segunda derivada para obtener el máximo o mínimo solicitado en el problema de optimización.

Ej 1. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada sin tapa. Calcular el volumen máximo que se puede obtener con 1,200 cm^2 de material

Resultado: Volumen máximo se obtiene con $b=20\ cm$ y $h=10\ cm$
Y el volumen máximo posible es $Vmax=4{,}000\ cm^3$

Ej 2. Se quiere construir una caja rectangular de base cuadrada que tenga una capacidad de 2000 cm^3 Si el costo unitario del material para los costados es de $\$1.5/cm^2$ y el costo unitario del material para la tapa y para la base es de $\$3/cm^2$, obtenga las dimensiones para invertir el mínimo costo en material.

Resultado: Costo mínimo se obtiene con $b=10\ cm$ y $h=20\ cm$
Y el costo mínimo es $1,800

Ej 3. Un paquete puede enviarse por correo ordinario sólo si la suma de su altura y el perímetro de su base no es mayor de 2 m. Encuentre las dimensiones de la caja de máximo volumen que puede enviarse por correo si la base de la caja es cuadrada.

Ej 4. Un trozo de alambre de 48cm de longitud, se va a cortar en dos partes. Una se doblará para formar un círculo y la otra se doblará para formar un cuadrado. ¿Dónde debe hacerse el corte de modo que la suma de las áreas del cuadrado y del círculo sea máxima?