## Capítulo 2. Funciones

**Objetivo:** El alumno analizará las características principales de las funciones reales de variable real y formulará modelos matemáticos.

**Contenido:**

2.1 Definición de función real de variable real y su representación gráfica. Definiciones de dominio, codominio y recorrido. Notación funcional. Funciones: constante, identidad, valor absoluto.
2.2 Funciones inyectivas, suprayectivas y biyectivas.
2.3 Igualdad de funciones. Operaciones con funciones. Función composición. Función inversa.
2.4 Clasificación de funciones según su expresión: explícitas, implícitas, paramétricas y dadas por más de una regla de correspondencia.
2.5 Funciones algebraicas: polinomiales, racionales e irracionales. Funciones pares e impares. Funciones trigonométricas directas e inversas y su representación gráfica.
2.6 La función logaritmo natural, sus propiedades y su representación gráfica.
2.7 La función exponencial, sus propiedades y su representación gráfica. Las funciones logaritmo natural y exponencial, como inversas. Cambio de base.
2.8 Las funciones hiperbólicas, directas e inversas.
2.9 Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos

## 2.1. Definición de función real de variable real

### Intervalos de variación

Un intervalo es un conjunto que se define indicando su valor inicial y su valor final. Si los dos extremos son números definidos, el intervalo se llama FINITO, y será alguna de las siguientes combinaciones.

$$Intervalo\ finito \begin{cases} Abierto \quad (a,b) = \{x \mid a < x < b; x \in \mathbb{R}\} \\ Cerrado \quad [a,b] = \{x \mid a \leq x \leq b; x \in \mathbb{R}\} \\ Semiabierto \quad (a,b] = \{x \mid a < x \leq b; x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

Si ALGUNO de los extremos son números INFINITOS, el intervalo recibe ese mismo nombre.

$$Intervalo\ infinito \begin{cases} (a,\infty) = \{x \mid a < x; x \in \mathbb{R}\} \\ [a,\infty) = \{x \mid a \leq x; x \in \mathbb{R}\} \\ (-\infty,\infty) = \{x \mid x \in \mathbb{R}\} \end{cases}$$

### Definición de función Real de variable Real

El concepto de función en general puede presentarse siguiendo dos diferentes puntos de vista, a estos dos puntos de vista se les puede identificar con los siguientes nombres:

a) Concepto tradicional
b) Enfoque con la teoría de conjuntos

***Concepto tradicional***

Cuando dos variables están relacionadas de tal forma que a cada valor de la primera corresponde un valor y solo uno de la segunda, se dice que la segunda es función de la primera.

Ejemplo.

La expresión $y = \pm\sqrt{x}$ no representa una función (representa una relación), ya que para cada valor positivo de x existen dos valores para y. Así, si $x_1 = 1$, $y_1 = 1$, $y_2 = -1$; si $x_2 = 4$, $y_3 = 2$, $y_4 = -2$.

Sin embargo, si se establece que los valores de la variable dependiente (Y) sean positivos, entonces con $y = +\sqrt{x}$ (x > 0, y > 0) se tiene una función. Lo mismo pasaría con $y = -\sqrt{x}$ (x > 0, y < 0).

La condición geométrica para que una relación sea una función, es que toda recta paralela al eje “Y” debe cortar su gráfica en un solo punto.

***Enfoque de la teoría de conjuntos***

Cuando se tienen dos conjuntos de números reales y sus elementos se relacionan de acuerdo con una regla que considera ciertas propiedades, se dice que existe una función en la que los elementos de un conjunto dependen de los del otro conjunto.

Conjunto producto

Sean A y B dos conjuntos. Si se colectan todas las parejas ordenadas (a, b) en donde el primer elemento a pertenece a A y el segundo elemento b pertenece a B, entonces esta colección de parejas ordenadas forma un conjunto que se denota por:

$$A \times B = \{ (a, b) \mid a \in A,\ b \in B \}$$

Y que se llama *producto cartesiano* de A y B.

Ejemplo: Dados los conjuntos:

$$A = \{1, 3, 5\}, B = \{2, 4\}, C = \{-6, 0, -7\}$$

Obtener: AxB, AxC, BxA, CxB

***Definición de relación***

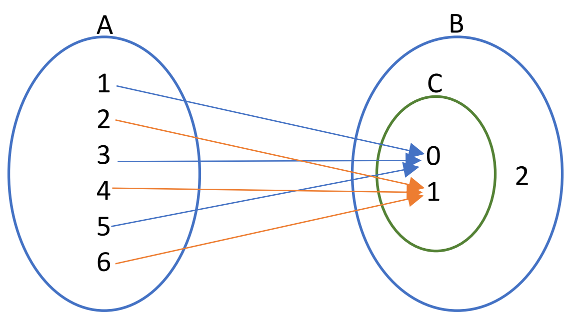
Una relación binaria o simplemente una relación, consiste en:

Un conjunto A

Un conjunto B

Una proposición P que es falsa o verdadera para todo par ordenado (a, b) del producto cartesiano AxB.

Una relación R de un conjunto A a un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano AxB, esto es: $\mathrm{R} \subset \mathrm{AxB}$. Una relación es una regla que asocia elementos del conjunto A con elementos de un conjunto B.




Al conjunto $\mathrm{C} \subset \mathrm{B}$ se le llama Recorrido, Rango o Imagen.

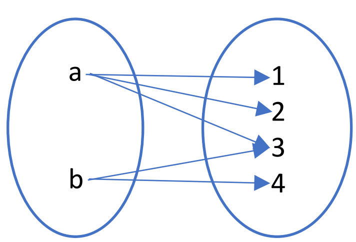
Relación: R = $\{(1,0), (2, 1), (3, 0), (4, 1), (5, 0), (6, 1)\}$

Dominio: $D_R = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

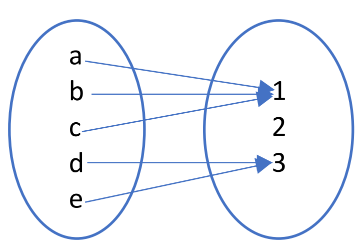
Codominio: $C_R = \{0, 1, 2\}$

Recorrido: $R_R = \{0, 1\}$

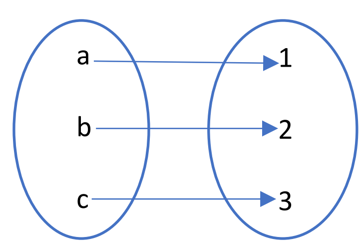
Si cada elemento del Dominio está asociado con un solo elemento del Codominio, la relación se denomina Uniforme, si está asociado con dos o más es Multiforme; finalmente, la relación es Biunívoca si es Uniforme de A hacia B y de B hacia A




Relación Multiforme




Relación Uniforme




Relación Biunívoca

Simbólicamente y de manera explícita, una Relación se escribe como:

$$R = \{(a, \mathrm{b}) \mid \mathrm{a} \in \mathrm{A}, \mathrm{b} \in \mathrm{B}; \mathrm{P}(\mathrm{x}, \mathrm{y})\}$$

P(x,y) representa la proposición que es falsa o verdadera para toda pareja ordenada del producto cartesiano AxB

***Definición de función***

Definición: Una función es una relación uniforme

Definición: Una función es una terna formada por:

a) Un *primer conjunto* llamado *dominio de la función*
b) Un *segundo conjunto* llamado *codominio de la función*
c) Una *regla de correspondencia* que tiene las siguientes propiedades:
    - Por medio de esta regla de correspondencia a todo elemento del dominio de la función, se le puede asociar un elemento del codominio.
    - Ningún elemento del dominio ha de quedarse sin su asociado en el codominio.
    - Ningún elemento del dominio puede tener más de un asociado en el codominio.

***Función real de variable real***

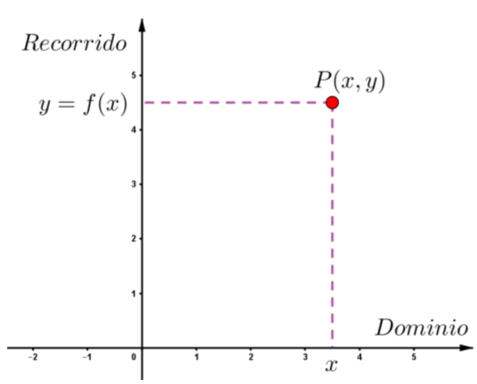
Para hablar de una función real de variable real, debe restringirse la naturaleza de los elementos que conforman la función. En el presente curso se tratará con funciones donde los elementos que intervienen pertenecen al conjunto de los números reales. Esto quiere decir que tanto la primera coordenada como la segunda serán números reales.

$$\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$$

***Representación gráfica***

En el estudio de las matemáticas y la física resulta de gran ayuda para una función, además de un diagrama que ilustre la correspondencia o dependencia de las variables que intervienen en ella, una representación geométrica de la misma. Así la gráfica de una función, que sigue la misma convención que la de una relación, es un elemento importante y trascendente para su estudio, así como para la solución del problema que modela.

Entonces, la gráfica de una función será el lugar geométrico de todos los puntos, esto es, parejas (x,y), cuyas coordenadas, abscisas (x) y ordenadas (y), satisfacen la ecuación y = f(x).



***Definición de dominio, codominio y recorrido***

***Dominio.*** Es el conjunto de todos los valores de x admisibles para una función.
***Codominio o contradominio.*** Es el conjunto de todos los valores de y admisibles para una función.
***Recorrido, rango o imagen.*** Es el conjunto de todos los valores resultantes de y al sustituir cada uno de los elementos del dominio de la función.

*Ejemplo*
Representar gráficamente, con diagramas de Venn, la siguiente función definida mediante parejas ordenadas, considerando el codominio y recorridos dados:

F = $\{(-3,0), (-2,1), (-1,2), (0,3), (1,4)\}$
$C_F$ = $\{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$
$R_F$ = $\{0, 1, 2, 3, 4\}$

***Notación funcional***
Como una función es una relación, se puede representar también a través de la teoría de conjuntos como:

$$f = \{(x, y) \mid x \in D_f; y = f(x)\}$$

O bien, cuando esto es posible, escribiendo las parejas ordenadas que la conforman, de la siguiente manera:

$$f = \{(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \dots, (x_n, y_n)\}$$

Para denotar a las funciones, además de las anteriormente citadas, existen varias formas, de las cuales, las más utilizadas, así como las formas de leerlas, se muestran a continuación:

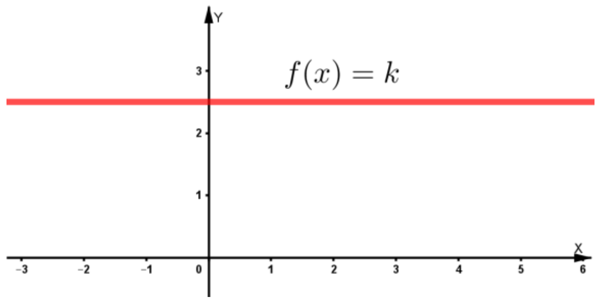
1. $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x});\ \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}$. Que se lee como: “y es una función de x, donde x pertenece al dominio $D_f$”

2. $\mathbf{f} = \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mid \mathbf{x} \in \mathbf{D_f}; \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$. Que se lee como “conjunto de parejas ordenadas (x, y) tales que cada elemento y se obtiene al aplicar la regla de correspondencia f a cada elemento x del dominio de la función”.

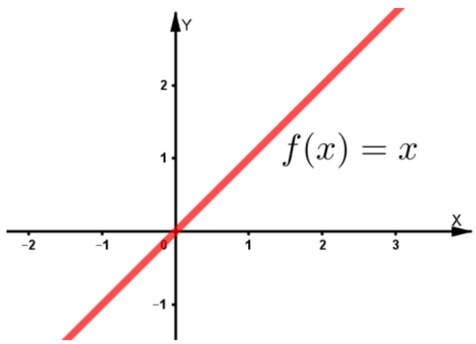
3. $\mathbf{f}: \mathbf{D_f} \to \mathbf{C_f}; \mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})\}$. Que se lee como: “función f que mapea al dominio $\boldsymbol{D_f}$ en el codominio $\boldsymbol{C_f}$ , dada la regla de correspondencia $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.

***Funciones: constante, identidad, valor absoluto***

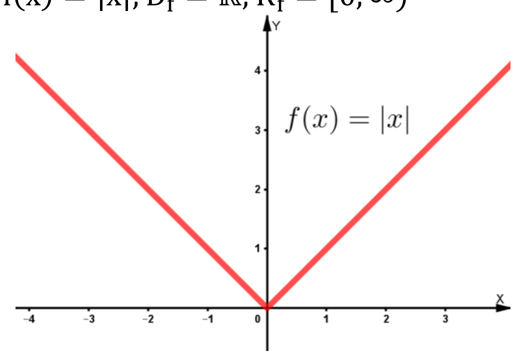
Función constante: $f(x) = k; D_f = \mathbb{R}; R_f = k$




Función identidad: $f(x) = x; D_f = \mathbb{R}; R_f = \mathbb{R}$

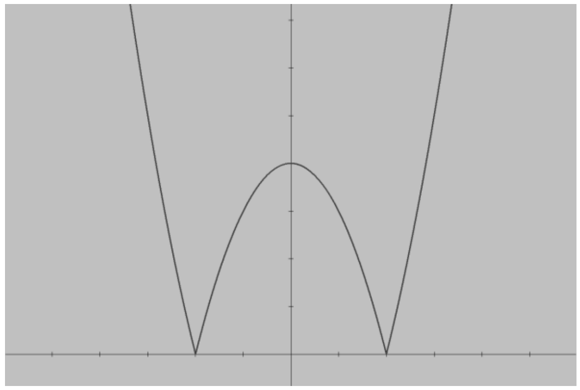



Función Valor Absoluto: $f(x) = |x|; D_f = \mathbb{R}; R_f = [0, \infty)$




$$f(x) = |x| = \begin{cases} x \ si\ x \geq 0 \\ -x \ si\ x < 0 \end{cases}$$

**Ej.** Esbozar la gráfica de $f(x) = |x^2 - 4|$

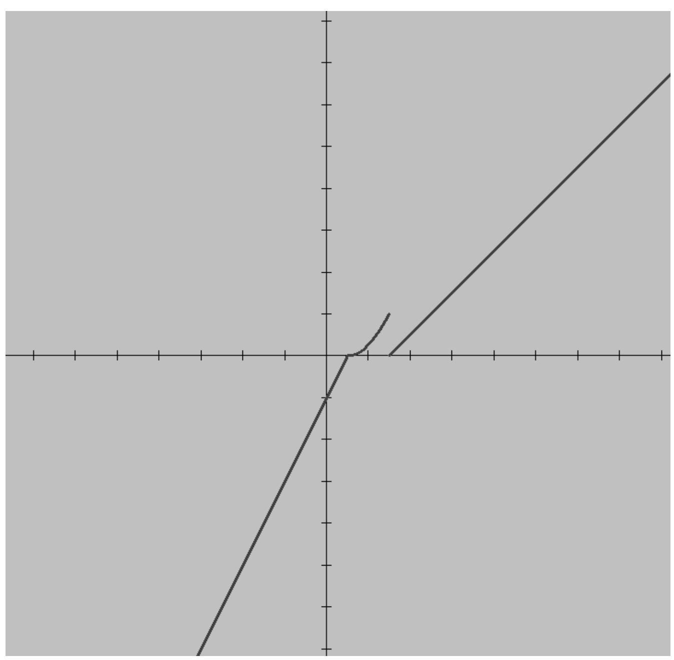


**Ej.** Si $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 \ \text{si} - 5 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \ \text{si} \ \frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ \left|x - \frac{3}{2}\right| \ \text{si} \ x > \frac{3}{2} \end{cases}$

Determinar el dominio y el recorrido de la función, así como su gráfica.

Resultado:

$$D_f = \left\{x \mid x \geq -5 \ con \ x \neq \frac{3}{2}\right\}$$
$$R_f = \{y \mid y \geq -11\}$$

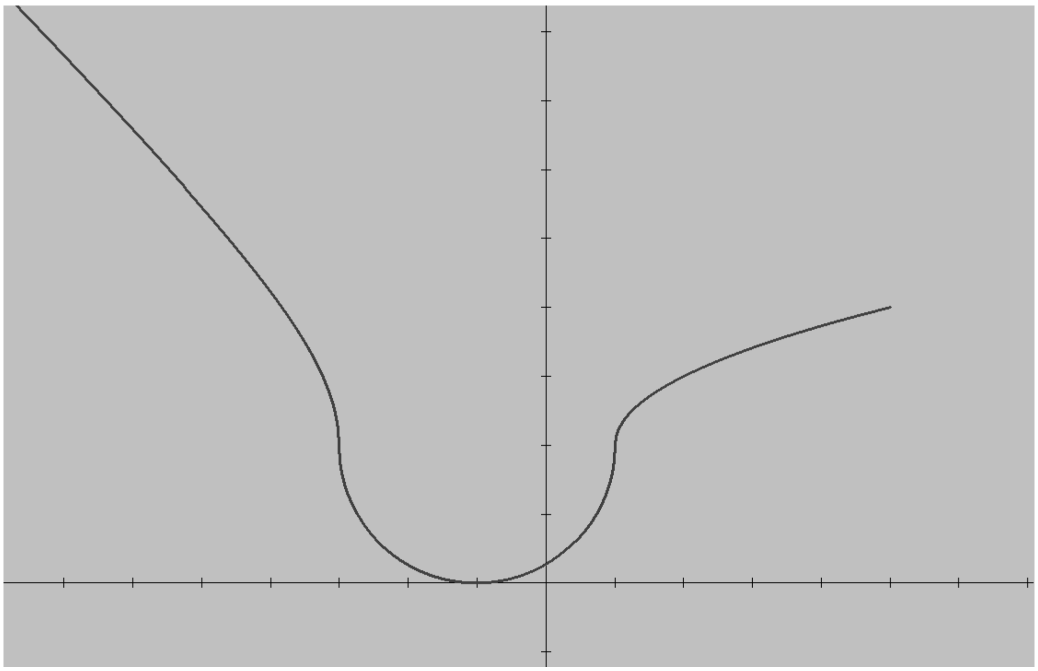


**Ej.** Si f(x) $= \begin{cases} 2+\ \sqrt{(x+1)^2-4} \ \text{ si x } \in (-\infty,-3] \\ 2-\ \sqrt{4-(x+1)^2} \ \text{ si x } \in (-3,1) \\ 2+\ \sqrt{x-1} \ \text{ si x } \in (1,5) \end{cases}$

Determinar el dominio y el recorrido de la función, así como su gráfica.

Resultado:

$$D_f = \{x \mid x \ \in (-\infty, 1) \cup (1,5)\}$$
$$R_f = \{y \mid y \geq 0\}$$

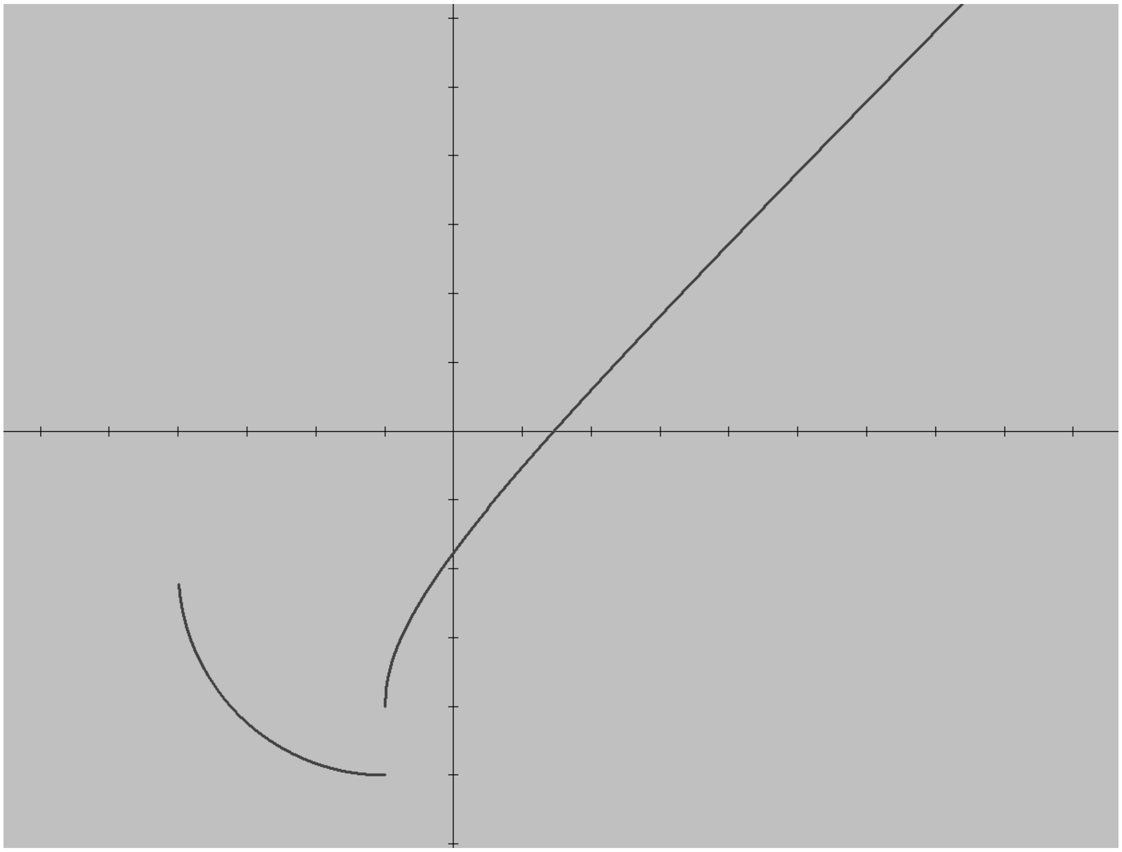


**Ej.** Si f(x) $= \begin{cases} -2-\ \sqrt{9-(x+1)^2} \ \text{ si x} < -1 \\ -4+\sqrt{(x+3)^2-4} \ \text{ si x} \geq -1) \end{cases}$

Determinar el dominio y el recorrido de la función, así como su gráfica.

Resultado:

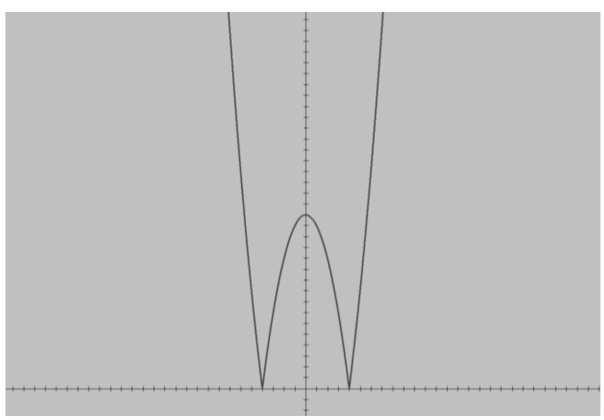
$$D_f = \{x \mid x \ \in [-4, \infty)\}$$
$$R_f = \{y \mid y \in (-5, \infty)\}$$



**Ej.** Determinar el dominio y el recorrido de la función, así como la gráfica de las siguientes funciones.

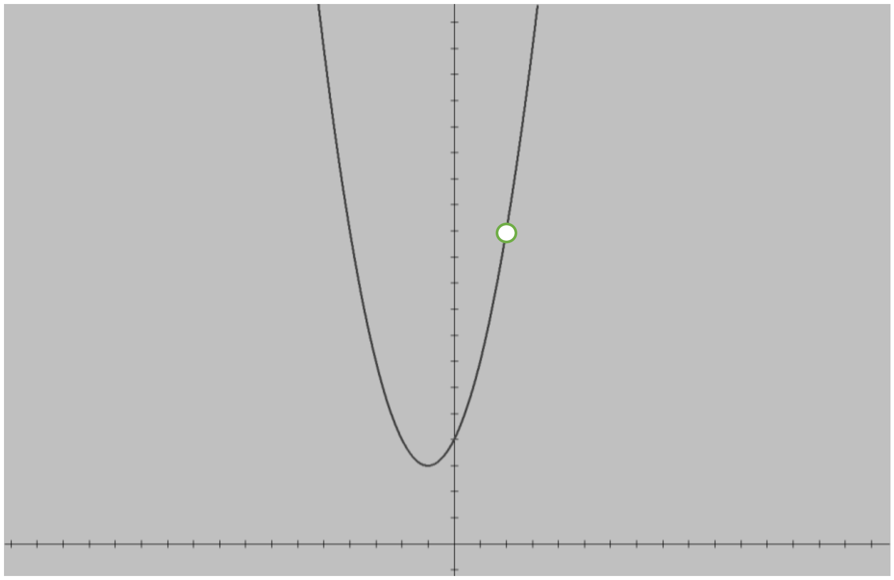
a) $\mathrm{f(x)} = |x^2 - 16|$

$$D_f = \{x \mid x \in (-\infty, \infty)\}$$
$$R_f = \{y \mid y \in [0, \infty)\}$$



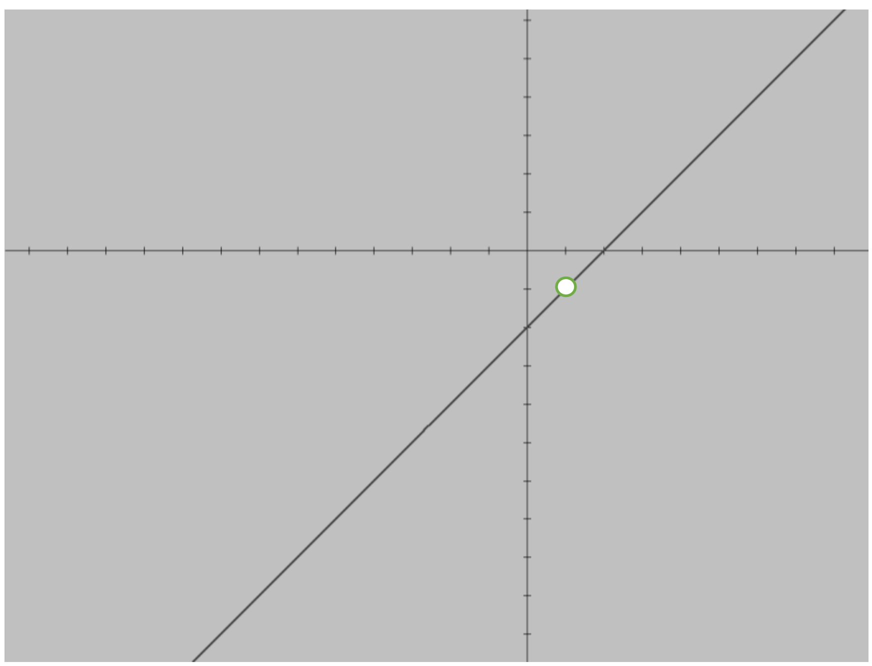
b) $\mathrm{f(x)} = \frac{3x^3-24}{3x-6} \rightarrow y - 3 = (x+1)^2$

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R} \; con \; x \neq 2\}$$
$$R_f = \{y \mid y \in [3, \infty) \}$$



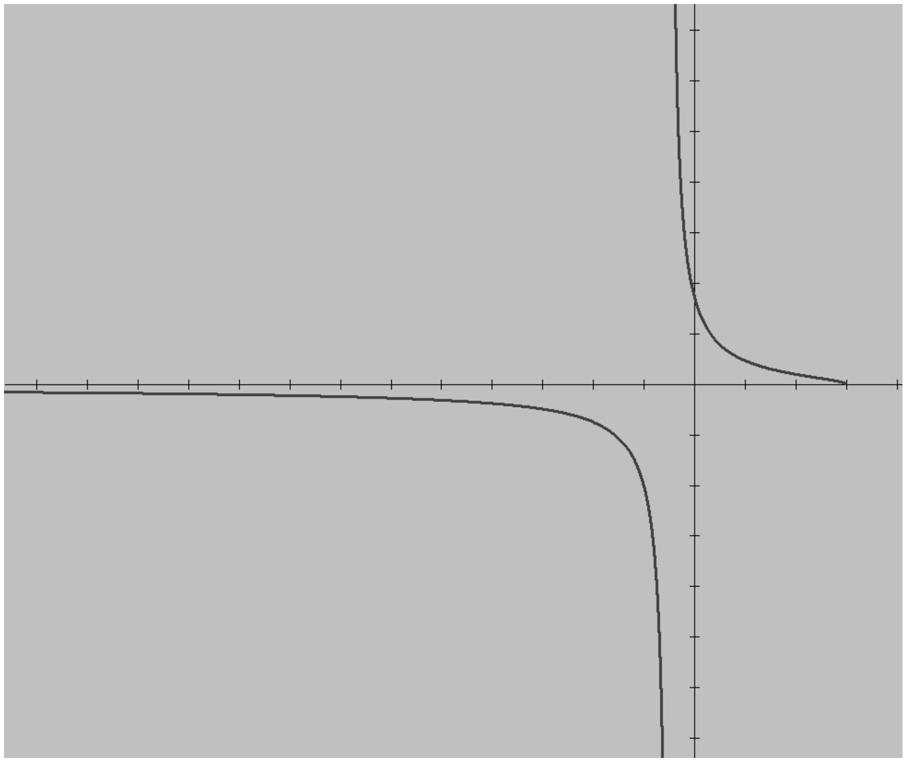
c) $f(x) = \frac{x^2-3x+2}{x-1} \rightarrow y = x - 2$

$$D_f = \{x \mid x \in \mathbb{R}\ con\ x \neq 1\}$$
$$R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}\ con\ y \neq -1\}$$



d) $f(x) = \frac{\sqrt{3-x}}{2x+1}$

$$D_f = \left\{x \mid x \in (-\infty, 3]\ con\ x \neq \frac{1}{2}\right\}$$
$$R_f = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$$



### 2.2. Funciones inyectivas, biyectivas y suprayectivas

Esta clasificación obedece a la forma en la que están relacionados los elementos del dominio con los del codominio.

*Función inyectiva (uno a uno)*
Definición. Una función f: $D_f \rightarrow C_f$ es *inyectiva o uno a uno* y se denota como 1-1, *si a diferentes elementos del dominio le corresponden distintos elementos del codominio*. En esta función, para dos valores cualesquiera $x_1$ y $x_2$ de su dominio se cumple que:

$$x_1 \neq x_2 \rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$$

Ejs. Línea recta, circunferencia, parábola, seno y coseno.

*Función suprayectiva (sobre)*
Definición. Una función es suprayectiva si todo elemento del codominio es imagen de por lo menos un elemento del dominio.

*Se debe cumplir con que el codominio y el recorrido sean iguales* ($R_f \rightarrow C_f$)

*Función biyectiva (1-1 y sobre)*
Definición. *Una función es biyectiva si al mismo tiempo es inyectiva y suprayectiva.*

**2.3. Igualdad de funciones. Operaciones con funciones. Función composición. Función inversa.**

**Igualdad de funciones**
Se dice que dos funciones f y g son iguales si tienen la misma regla de correspondencia y están definidas en el mismo dominio con mapeo en el mismo contradominio.

**Adición**

$$(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) + \mathrm{g}(\mathrm{x}); \text{con } \mathrm{D}_{f+g} = D_f \cap D_g$$

**Ej.**
Si $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = x^2 + 1$ y $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = +\sqrt{x-3}$ , obtener (f+g)(x) y su dominio
Solución: $(\mathrm{f}+\mathrm{g})(\mathrm{x}) = x^2 + 1 + \sqrt{x-3}$ ; con $\mathrm{D}_{f+g} = [3, \infty)$

**Sustracción**

$$(\mathrm{f}-\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x}) - \mathrm{g}(\mathrm{x}); \text{con } \mathrm{D}_{f-g} = D_f \cap D_g$$

**Ej.**
Si $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = 3x^2 + \mathrm{x}$ y $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = x^2 + \sqrt{x^3}$ , obtener (f-g)(x) y su dominio
Solución: $(\mathrm{f}-\mathrm{g})(\mathrm{x}) = 2x^2 + \mathrm{x} - \sqrt{x^3}$ ; con $\mathrm{D}_{f-g} = [0, \infty)$

**Multiplicación**

$$(\mathrm{f}\,\mathrm{g})(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})\,\mathrm{g}(\mathrm{x}); \text{con } \mathrm{D}_{f\,g} = D_f \cap D_g$$

**Ej.**
Si $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = +\sqrt{x-1}$ y $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = +\sqrt{9-x^2}$ , obtener (fg)(x) y su dominio
Solución: $(\mathrm{f}\,\mathrm{g})(\mathrm{x}) = +\sqrt{x-1}\sqrt{9-x^2}$ ; con $\mathrm{D}_{f\,g} = [1{,}3]$

**División**

$$\left(\frac{\mathrm{f}}{g}\right)(\mathrm{x}) = \frac{\mathrm{f}(\mathrm{x})}{\mathrm{g}(\mathrm{x})} \text{ ; con } \mathrm{D}_{f/g} = D_f \cap D_g\ y\ \mathrm{g}(\mathrm{x}) \neq 0$$

**Ej.**
Si $\mathrm{f}(\mathrm{x}) = +\sqrt{(x+2)^3}$ y $\mathrm{g}(\mathrm{x}) = +\sqrt{(x+3)(5-x)}$ , obtener $\left(\frac{\mathrm{f}}{g}\right)(\mathrm{x})$ y su dominio
Solución: $\left(\frac{\mathrm{f}}{g}\right)(\mathrm{x}) = \frac{+\sqrt{(x+2)^3}}{+\sqrt{(x+3)(5-x)}}$ ; con $\mathrm{D}_{f/g} = [-2{,}5)$

**Función composición**

La composición de la función f con la función g se define como:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x))$$
$$\textit{con el dominio}: D_{f \circ g} = \left\{x \mid x \in D_g\ ;\ g(x) \in D_f\right\}$$

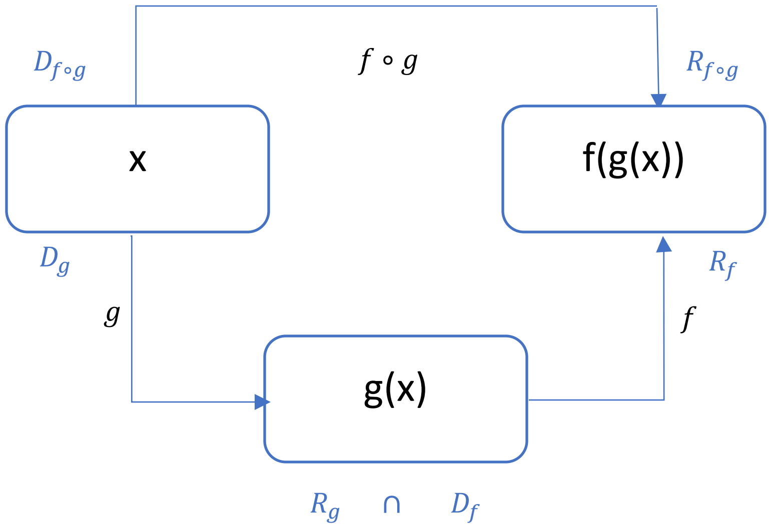
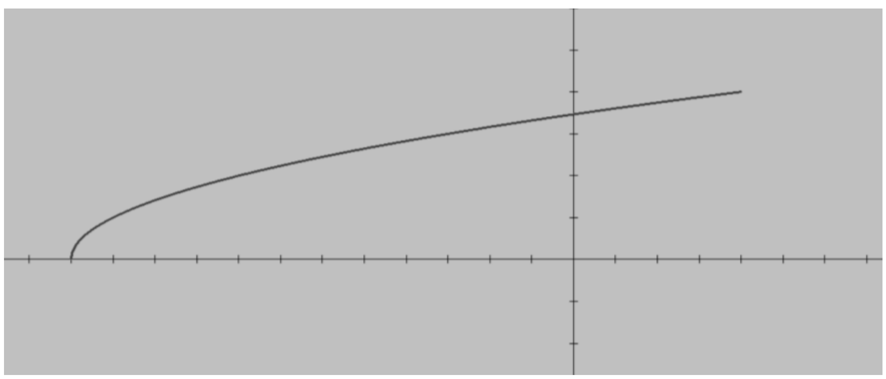



Figura. Diagrama que describe la composición de funciones

**Ej.** Determinar **$g \circ f$** si $f(x) = \sqrt{4 - x}$ y $g(x) = \sqrt{16 - x^2}$

**Solución:** $R_f \cap D_g = [0,4]$ ... $g \circ f = \sqrt{12 + x}$ ... $D_{g\circ f} = [-12\,, 4], R_{g\circ f} = [0\,, 4]$



**Ej.** Determinar **$g \circ f$** si $f(x) = \sqrt{x} + 1$ y $g(x) = 6x^3 + 8$
**Solución:** $R_f \cap D_g = [1, \infty)$ ... $g \circ f = 6\left(\sqrt{x} + 1\right)^3 + 8$ ... $D_{g\circ f} = [0\,, \infty), R_{g\circ f} = [14\,, \infty)$

**Ej.** Determinar **$f \circ g$** si $f(x) = \sqrt{x + 3}$ y $g(x) = (x - 4)^2$
**Solución:** $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ... $f \circ g = \sqrt{(x - 4)^2 + 3}$ ... $D_{f\circ g} = \mathbb{R}, R_{f\circ g} = [\sqrt{3}\,, \infty)$

**Ej.** Determinar **$f \circ g$** si $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = \sqrt{x^2 - 9}$
**Solución:** $R_g \cap D_f = [0, \infty)$ ... $f \circ g = x^2 - 7$ ... $D_{f\circ g} = (-\infty, -3] \cup [3, \infty)$

$R_{f\circ g} = [2\,, \infty)$

**Ej.** Determinar **f ∘ g** si $\text{f(x)} = \sqrt{-x}$ y $\text{g(x)} = 1 - x^2$

**Solución:** $R_g \cap D_f = (-\infty, 0] \ldots\ f \circ g = \sqrt{x^2 - 1} \ldots D_{f \circ g} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

$$R_{f \circ g} = [0\,, \infty)$$

**Ej.** Determinar **g ∘ f** si $\text{f(x)} = \sqrt{-x}$ y $\text{g(x)} = 1 - x^2$

**Solución:** $R_f \cap D_g = [0, \infty) \ldots\ g \circ f = 1 + x \ldots D_{g \circ f} = (-\infty, 0], R_{g \circ f} = (-\infty, 1]$

## Función inversa

Si en una función biyectiva se cambian “x” por “y” y “y” por “x”, y se despeja la nueva variable dependiente “y”, la relación resultante es una nueva función que se llama “función inversa” y se denota con “$f^{-1}$”.

Cabe mencionar que, el dominio de f se convierte en el recorrido de $f^{-1}$ y que el recorrido de f se convierte en el dominio de $f^{-1}$.

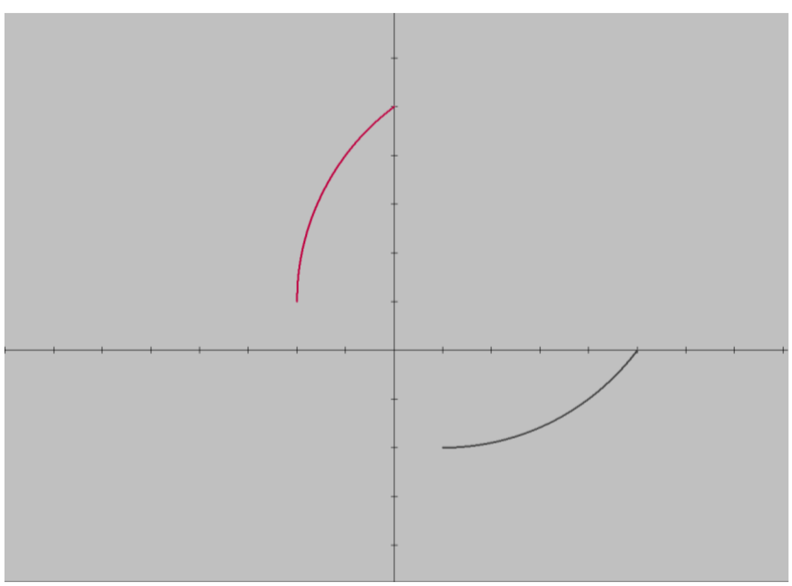
La notación $f^{-1}$, no es un exponente y por lo tanto, no se obtiene el inverso o recíproco algebraico (solo es notación).

**Ej.** Obtener la regla de correspondencia de la función inversa, así como su dominio y recorrido. Trazar las gráficas de f y $f^{-1}$.

$$\text{f(x)} = \left\{(x, y) \mid y = 3 - \sqrt{25 - (x-1)^2}\,;\, 1 \leq x \leq 5\right\}$$

Resultado:

$$f : [1{,}5] \to [-2{,}0]$$
$$(x+1)^2 + (y-3)^2 = 25 \to f^{-1}(x) = 1 + \sqrt{25 - (x-3)^2}$$
$$f^{-1} : [-2{,}0] \to [1{,}5]$$



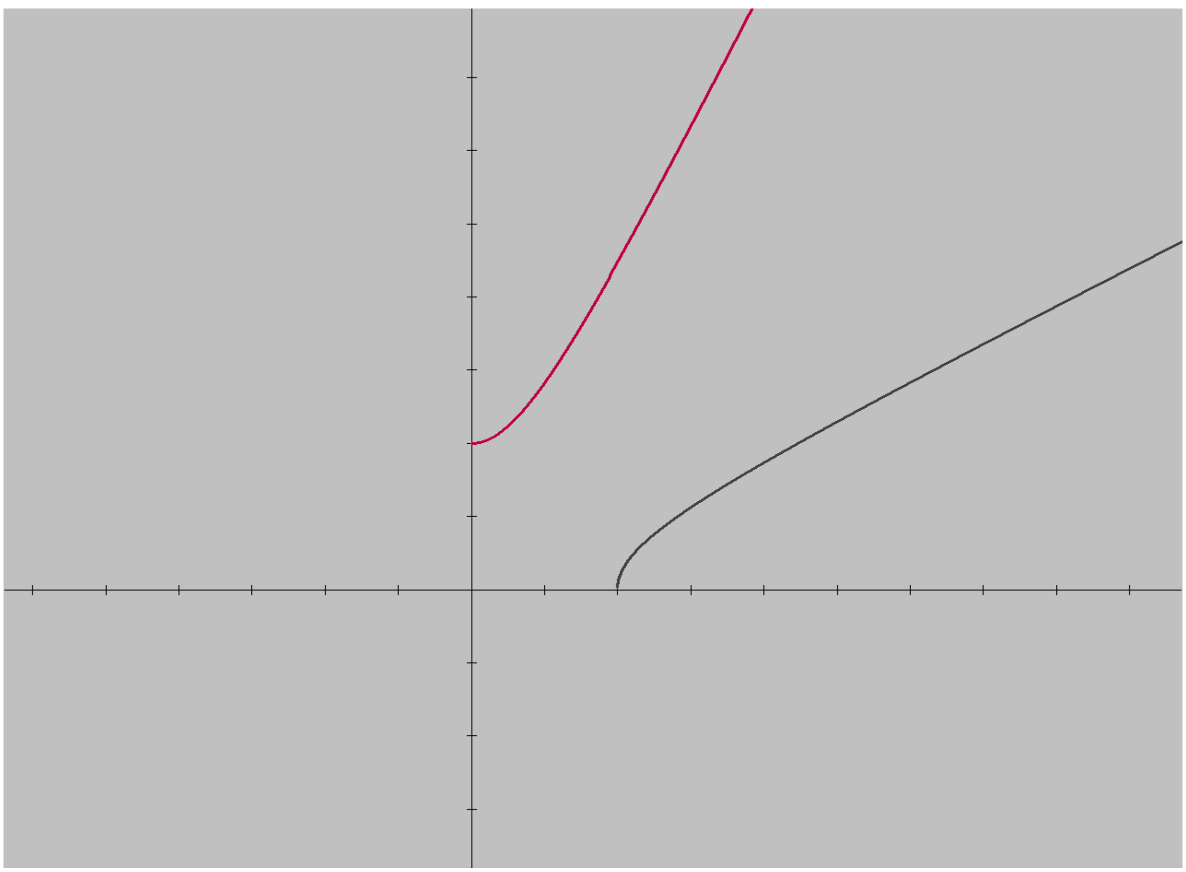
**Ej.** Obtener la regla de correspondencia en forma cartesiana de la función inversa, así como su dominio y recorrido. Trazar las gráficas de f y $f^{-1}$.

$$\text{f(x)} = \begin{cases} x = 2sec\theta \\ y = tan\theta \end{cases}; 0 \leq \theta < \frac{\pi}{2}$$

Resultado:

$$\frac{x^2}{4} - y^2 = 1$$
$$f: [2, \infty) \to [0, \infty)$$

$$f^{-1}: \frac{y^2}{4} - x^2 = 1$$
$$f^{-1}(x) = \sqrt{4 + 4x^2}$$
$$f^{-1}: [0, \infty) \to [2, \infty)$$

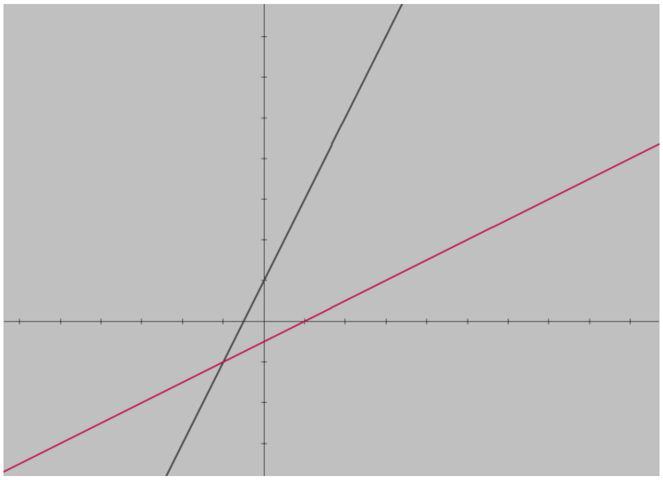


**Ej.** Obtener la regla de correspondencia de la función inversa, así como su dominio y recorrido. Trazar las gráficas de f y $f^{-1}$.

$$\mathrm{f(x)} = \{(x, y) \mid y = 2x + 1 \,;\, x \in [-2, 2]\,\}$$

Resultado:

$$f : [-2,2] \to [-3,5]$$
$$y = \frac{x-1}{2}$$
$$f^{-1} : [-3,5] \to [-2,2]$$

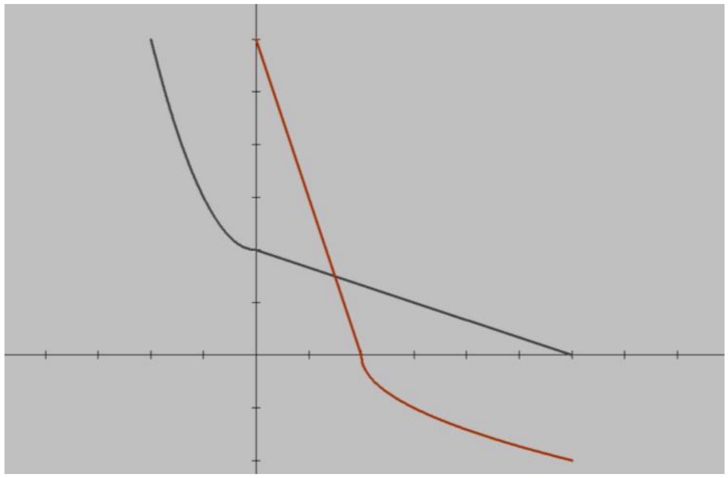


**Ej.** Obtener la regla de correspondencia en forma cartesiana de la función inversa, así como su dominio y recorrido. Trazar las gráficas de f y $f^{-1}$.

$$\mathrm{f(x)} = \begin{cases} x^2 + 2 \; si -2 \leq x < 0 \\ \dfrac{-x+6}{3} \; si \; 0 \leq x \leq 6 \end{cases}$$

Resultado:

$$f : [-2,6] \to [0,6]$$
$$\mathrm{f}^{-1}(\mathrm{x}) = \begin{cases} -3x + 6 \; si \; 0 \leq x \leq 2 \\ -\sqrt{x-2} \; si \; 2 < x \leq 6 \end{cases}$$
$$f^{-1} : [0,6] \to [-2,6]$$



**Ej.** Obtener la regla de correspondencia en forma cartesiana de la función inversa, así como su dominio y recorrido. Trazar las gráficas de f y $f^{-1}$.

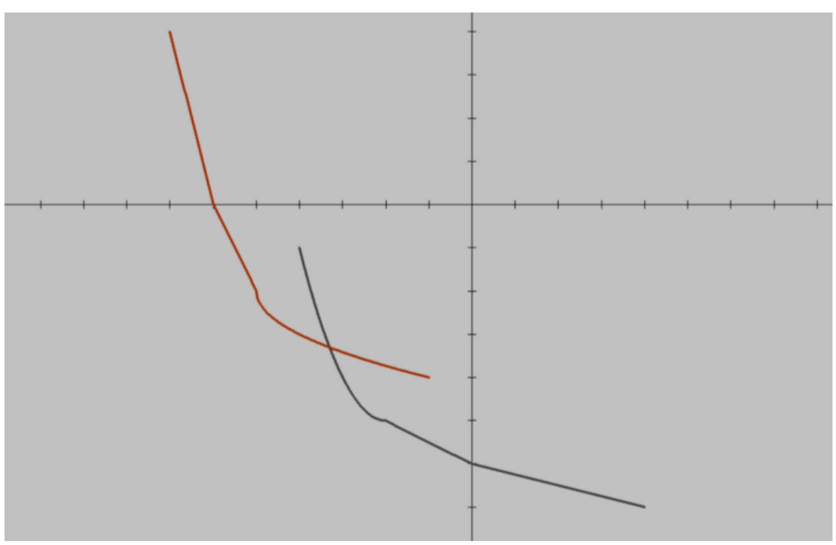
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 4x - 1 \; si -4 \leq x \leq -2 \\ -\frac{1}{2}x - 6 \quad si -2 < x < 0 \\ \dfrac{-x - 24}{4} \quad si \; 0 \leq x < 4 \end{cases}$$

Resultado:

$$f: [-4,4) \rightarrow (-7,-1]$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -4x - 24 \; si -7 < x \leq -6 \\ -2x - 12 \quad si -6 < x < -5 \\ -2 - \sqrt{x+5} \quad si -5 \leq x \leq -1 \end{cases}$$

$$f^{-1}: (-7,-1] \rightarrow [-4,4)$$



**2.4. Clasificación de funciones según su expresión: explícitas, implícitas, paramétricas y dadas por más de una regla de correspondencia.**

***Explícitas***
Está despejada una variable a la cual llamaremos “variable dependiente”
Ej. $f(x) = 5x + 2$

***Implícitas***
Las variables se encuentran sin despejar
Ej. 3x-2y-=0

***Paramétricas***
Las variables x, y se escriben en función de un parámetro

$$f(x) = \begin{cases} x = 2cos\theta \\ y = 3sen\theta \end{cases}$$

***Función definida por mas de una regla de correspondencia***
Es una función que, por su naturaleza, no es posible de describir con una sola regla de correspondencia, sino que dependiendo del intervalo donde se encuentra la variable independiente ($x$), tendrá una regla de correspondencia específica para dicho intervalo.

El recorrido de la función será la unión de los intervalos en donde se mueve $f(x)$ para cada una de sus reglas de correspondencia.

Es importante vigilar que en los cambios de regla de correspondencia NUNCA se encuentren dos diferentes valores de $f(x)$, para que siga siendo una función.

**2.5. Funciones algebraicas: polinomiales, racionales e irracionales. Funciones pares e impares. Funciones trigonométricas directas e inversas y su representación gráfica.**

**Funciones Algebraicas:** son aquellas cuando en la regla de correspondencia sólo intervienen las operaciones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, potencia o radicación).

***Polinomiales***
Las funciones Polinomiales no tienen ninguna restricción para su dominio, $\therefore\ D_f = \mathbb{R}$
Ej. $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x - 4$

***Racionales***
Las funciones Racionales tienen por restricción que su divisor nunca sea cero.
Ej. $\mathrm{f(x)}=\frac{2x+5}{x-1}$

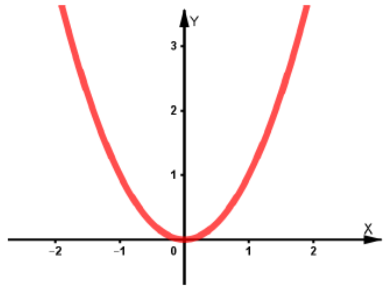
***Irracionales***
Las funciones Irracionales tienen por restricción que su radicando sea el conjunto de valores admisibles para la raíz en cuestión.
Ej. $f(x) = \sqrt{x+2}$

**Funciones pares e impares**

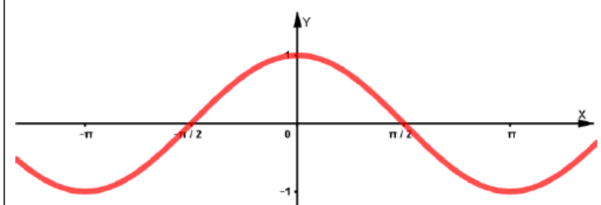
**Función par**

Es aquella en donde se verifica que $f(-x) = f(x)$. Su gráfica es simétrica respecto al eje Y.

$f(x) = x^2 \implies f(-x) = (-x)^2 = x^2$



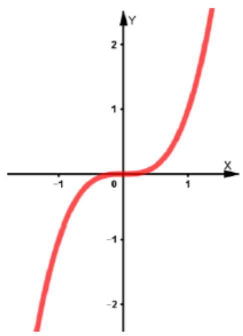
$f(x) = \cos x \implies f(-x) = \cos(-x) = \cos x$



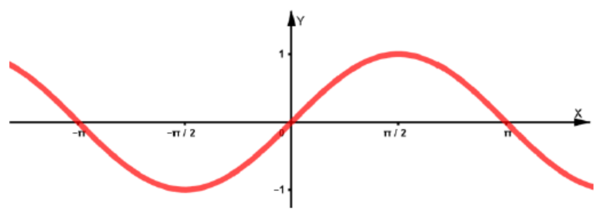
**Función impar**

Es aquella en donde se verifica que $f(-x) = -f(x)$. Su gráfica es simétrica respecto al origen.

$f(x) = x^3 \implies f(-x) = (-x)^3 = -x^3$

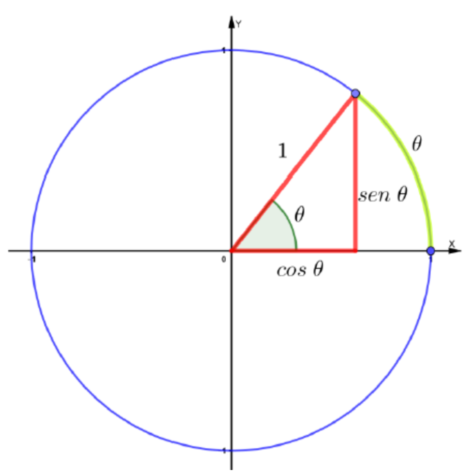


$f(x) = \operatorname{sen} x \implies f(-x) = \operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$

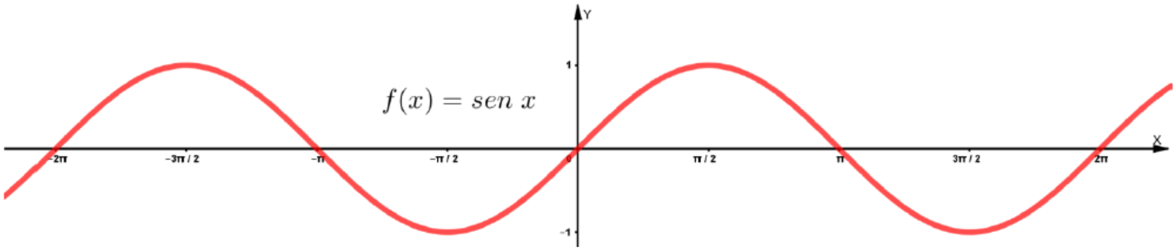


**Funciones trascendentes:** son aquellas cuando en la regla de correspondencia, al menos una operación no sea algebraica. Se clasifican en trigonométricas, exponenciales y logarítmicas.

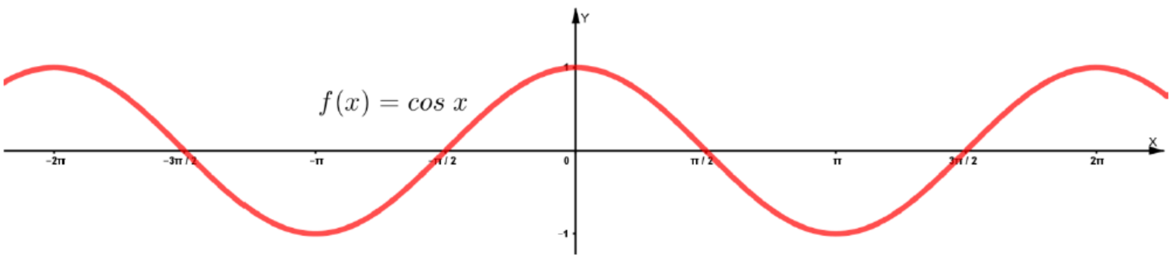
***Funciones trigonométricas directas***



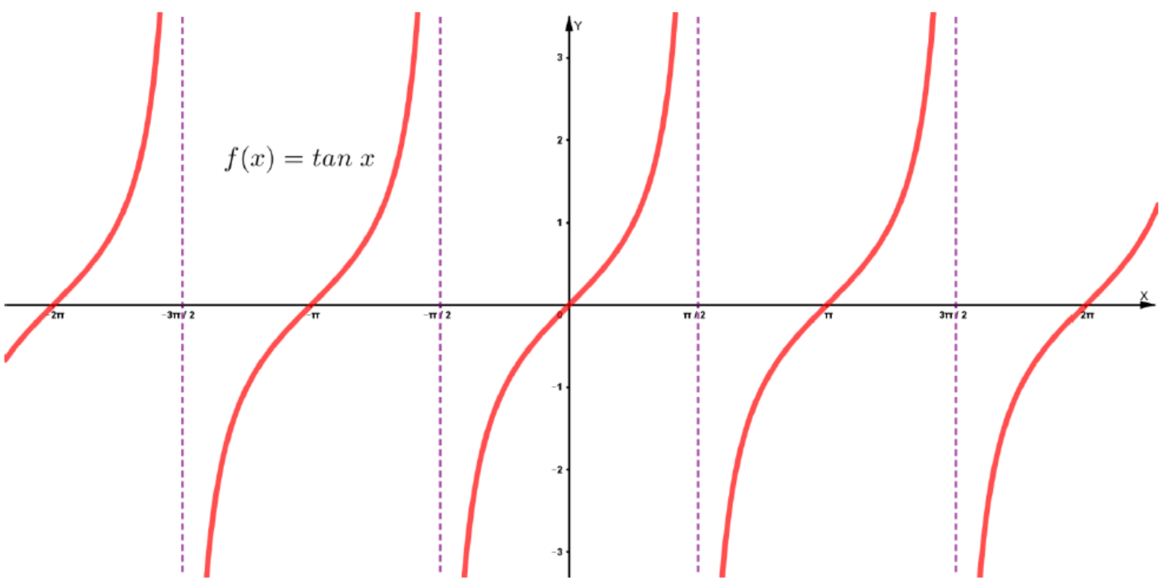
$f(x) = sen\, x = sen\,(x + 2\pi)$ $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [\,-1\,,1\,]$ $Período: 2\pi$



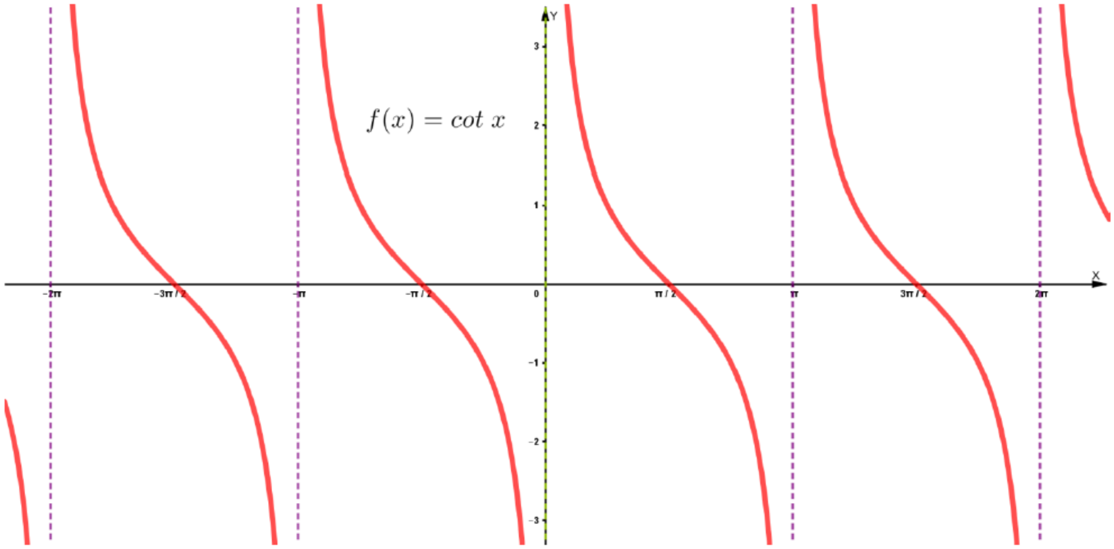

$f(x) = cos\, x = cos\,(x + 2\pi)$ $D_f = \mathbb{R}$ $R_f = [\,-1\,,1\,]$ $Período: 2\pi$



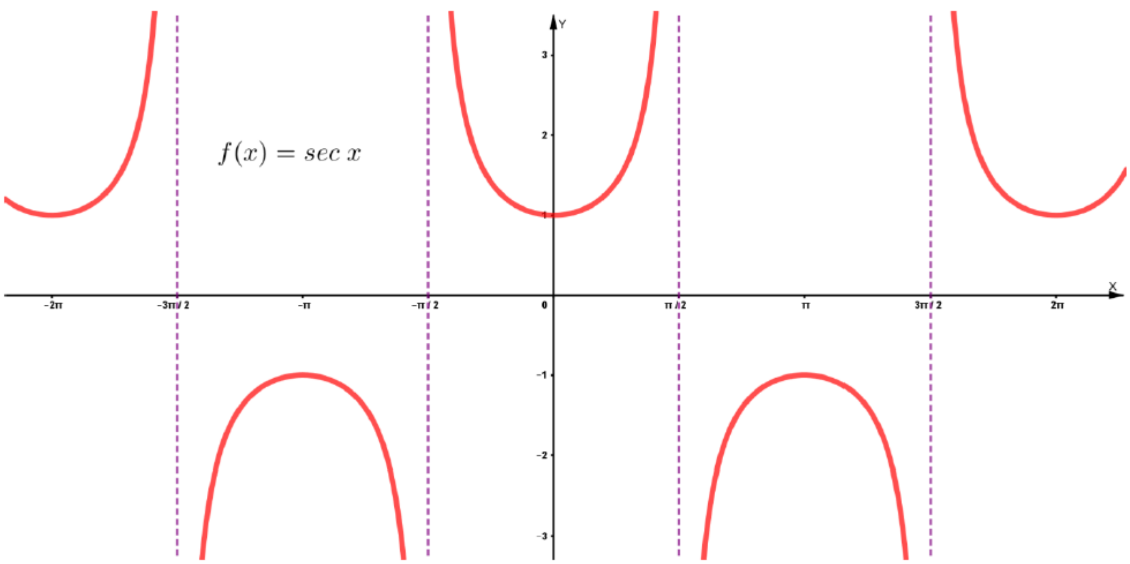

$f(x) = tan\, x = tan\,(x + \pi)$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \dfrac{2n-1}{2}\pi\,;n \in \mathbb{R} \right\}$ $R_f = \mathbb{R}$ $Período: \pi$



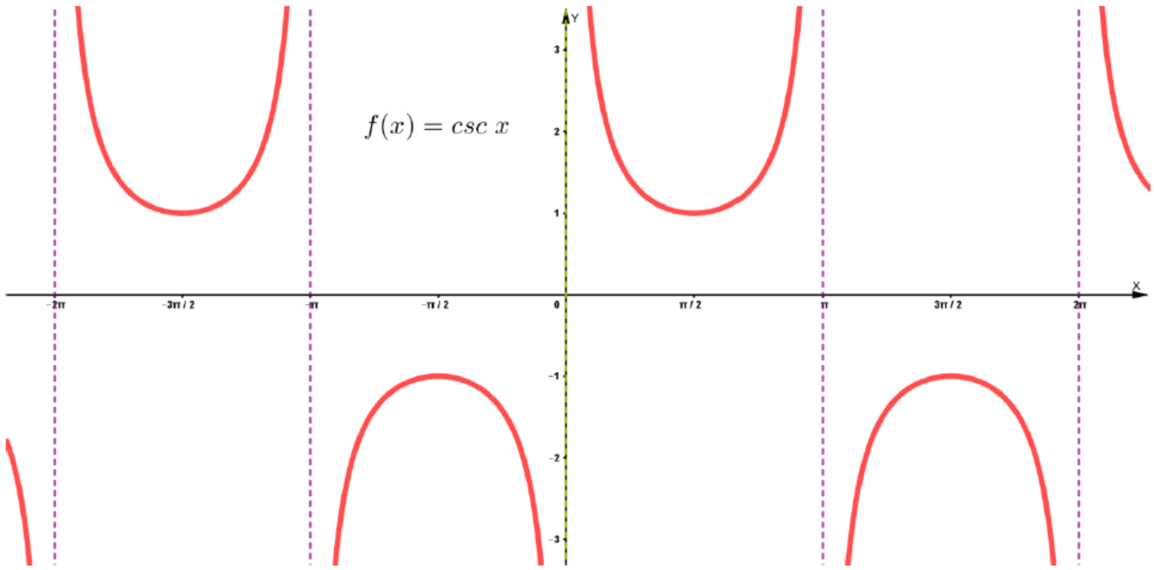
$f(x) = cot\ x = cot\ (x + \pi)$ $D_f = \mathbb{R} - \{ n\,\pi\,; n \in \mathbb{R} \}$ $R_f = \mathbb{R}$ $Período: \pi$




$f(x) = sec\ x = sec\ (x + 2\pi)$ $D_f = \mathbb{R} - \left\{ \frac{2n - 1}{2}\pi\,; n \in \mathbb{R} \right\}$ $R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $Período: 2\pi$



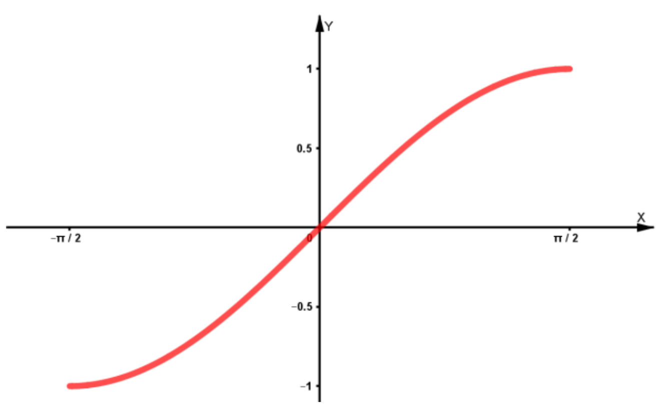
$f(x) = csc\ x = csc\ (x + 2\pi)$ $\quad D_f = \mathbb{R} - \{\, n\,\pi \,; n \in \mathbb{R} \,\}$ $\quad R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$ $\quad Período: 2\pi$

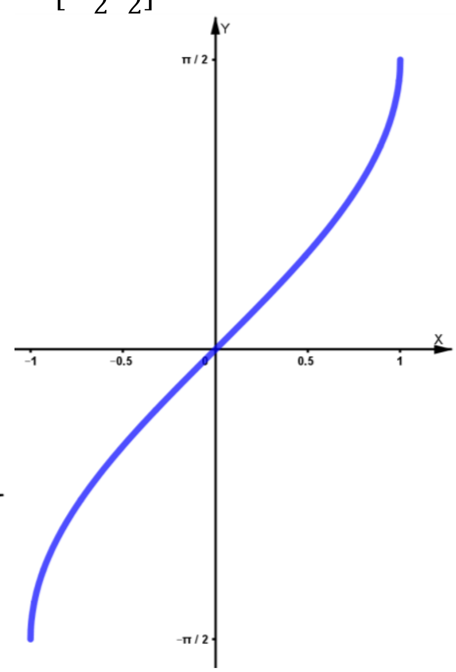



***Funciones trigonométricas inversas***

$f(x) = sen(x) \rightarrow f(x) = ang\ sen\ X$

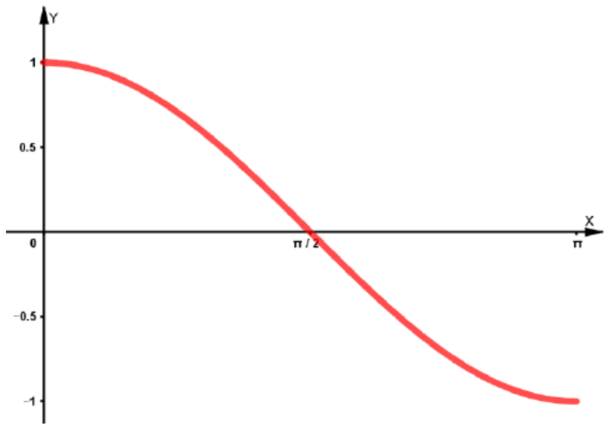
$D_f = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\ ;\ R_f = [-1{,}1] \qquad D_{f^{-1}} = [-1{,}1]\ ;\ R_{f^{-1}} = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$



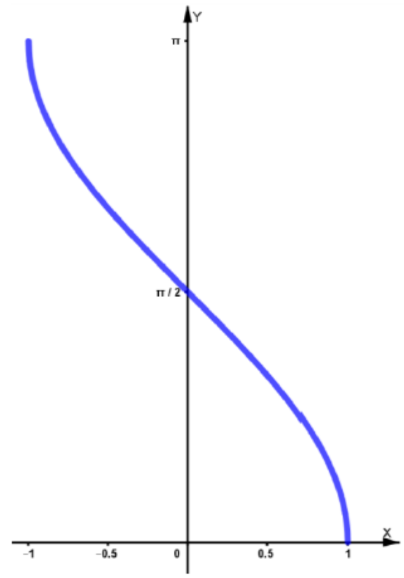
$$f(x) = cos\ x$$

$$D_f = [\,0\,,\pi\,] \quad R_f = [\,-1\,,1\,]$$



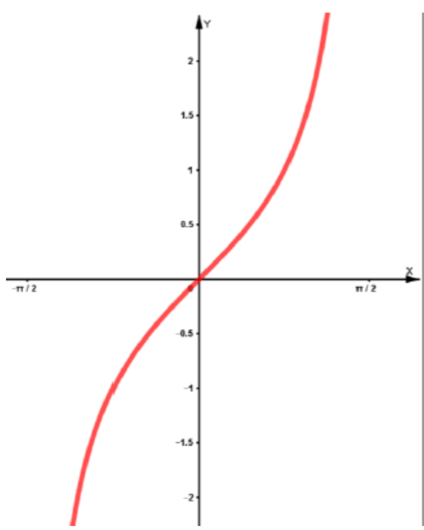

$$f(x) = cos^{-1}x = ang\ cos\ x$$

$$D_{f^{-1}} = [\,-1\,,1\,] \quad R_{f^{-1}} = [\,0\,,\pi\,]$$



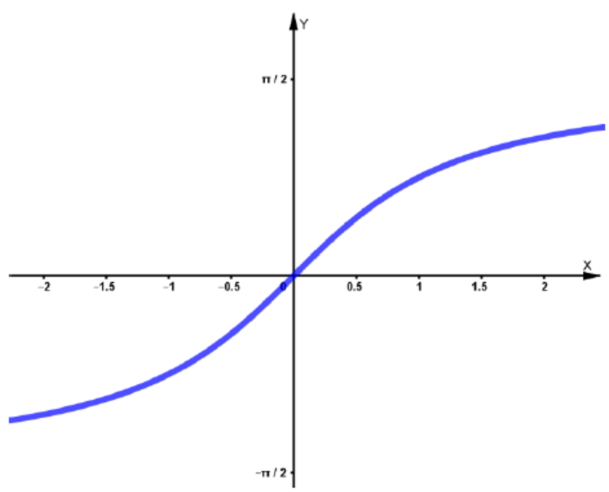

$$f(x) = tan\ x$$

$$D_f = \left(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right) \quad R_f = \mathbb{R}$$



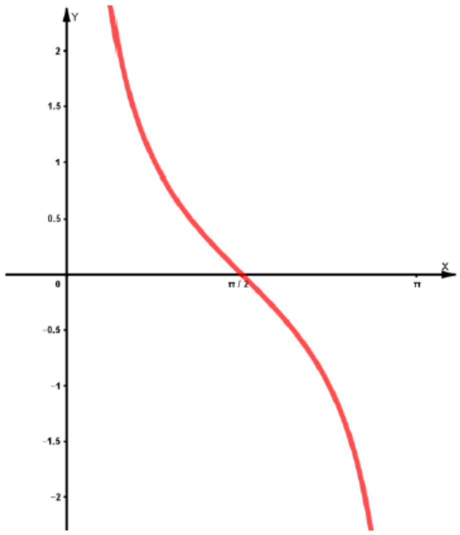

$$f(x) = tan^{-1}x = ang\ tan\ x$$

$$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}} = \left(-\frac{\pi}{2}\,,\frac{\pi}{2}\right)$$



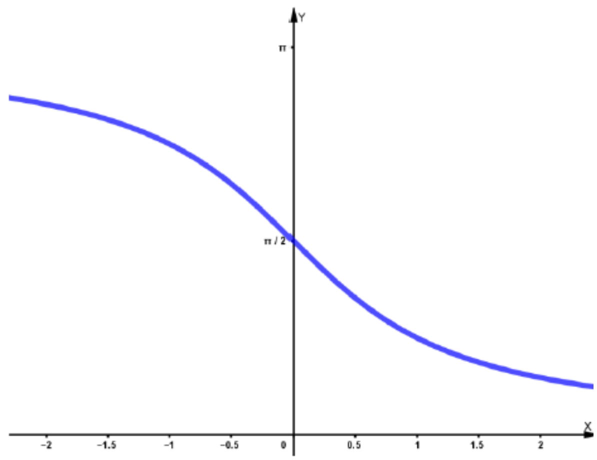
$f(x) = \cot x$

$D_f = (0, \pi) \quad R_f = \mathbb{R}$




$f(x) = \cot^{-1} x = ang\ \cot x$

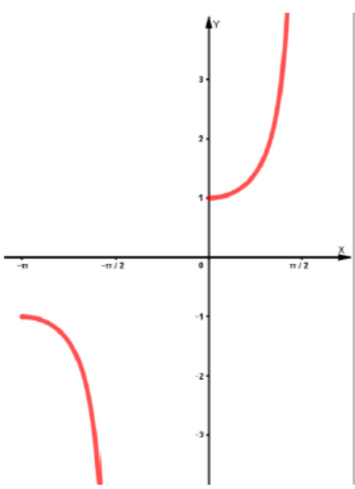
$D_{f^{-1}} = \mathbb{R} \quad R_{f^{-1}} = (0, \pi)$




$f(x) = \sec x$

$D_f = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$

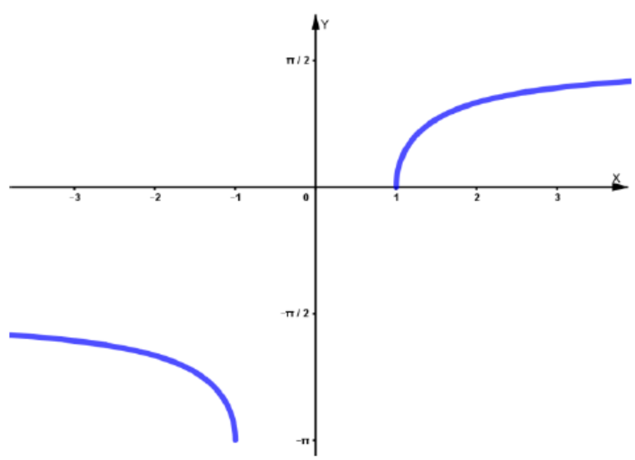
$R_f = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$




$f(x) = \sec^{-1} x = ang\ \sec x$

$D_{f^{-1}} = (-\infty, -1] \cup [1, \infty)$

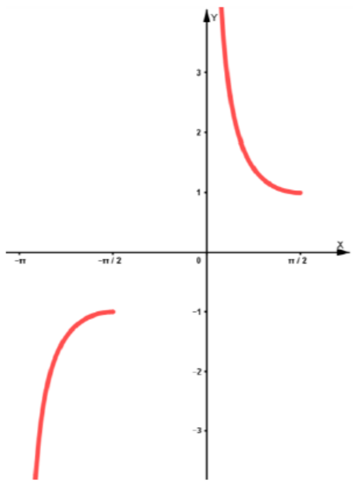
$R_{f^{-1}} = \left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right) \cup \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$



$$f(x) = csc\ x$$

$$D_f = (-\pi\,, -\frac{\pi}{2}\,] \cup (\,0\,, \frac{\pi}{2}\,]$$

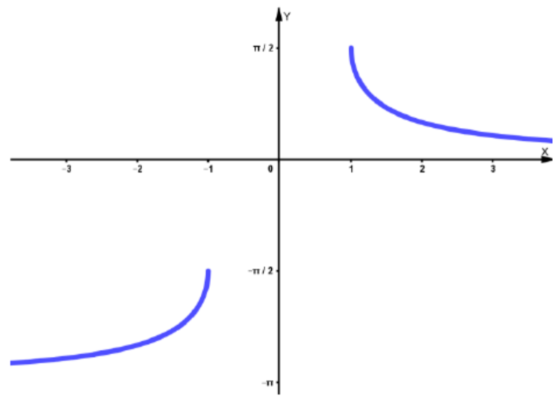
$$R_f = (-\infty\,, -1\,] \cup [\,1\,, \infty)$$



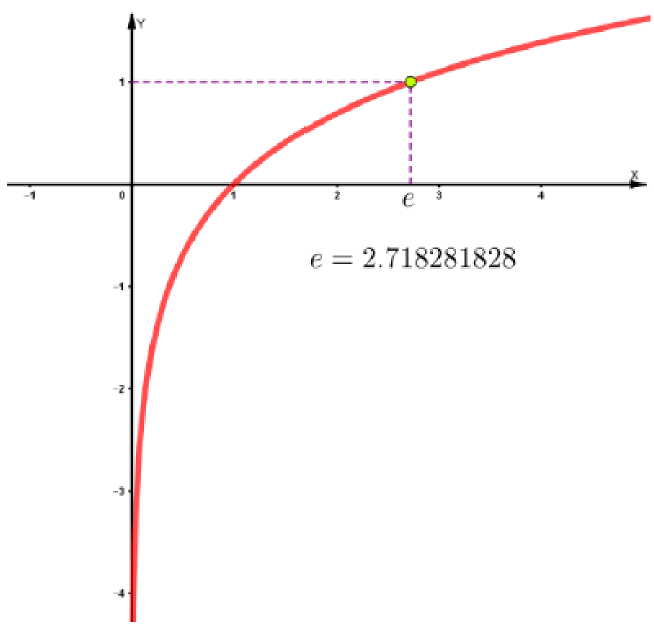
$$f(x) = csc^{-1}x = ang\ csc\ x$$

$$D_{f^{-1}} = (-\infty\,, -1\,] \cup [\,1\,, \infty)$$

$$R_{f^{-1}} = (-\pi\,, -\frac{\pi}{2}\,] \cup (\,0\,, \frac{\pi}{2}\,]$$



**2.6. La función logaritmo natural, sus propiedades y su representación gráfica.**




$$f(x) = \ln x = \int_1^x \frac{1}{t}\,dt\,;\ x > 0$$

$$D_f = (0, \infty)\,;\ R_f = \mathbb{R}$$

La curva es asintótica con el eje Y, cruza al eje X en el valor $x$=1, y nunca deja de crecer hacia la derecha. El número $e$ es el valor en el cual ln $e$ = 1.

Las principales propiedades de la función ln $x$ son:

$$\mathbf{ln\,1 = 0}\,;\mathbf{ln\,e = 1}\,;\ \ \mathbf{ln(ab) = ln\,a + ln\,b}\ ;\ \mathbf{ln\left(\frac{a}{b}\right) = ln\,a - ln\,b}\ ;\ \mathbf{ln\,e^x = x}\,;\ \mathbf{ln\,a^x = x\,ln\,a}$$

**Ej.** Determinar dominio, recorrido y gráfica de $f(x) = \ln(2x)$; $f(x) = \ln(-x)$ ; $f(x) = \ln(x-2)$

**Ej.** Obtener el $\ln\left(\sqrt[4]{\frac{x^2-5x+6}{x^3}}\right)$

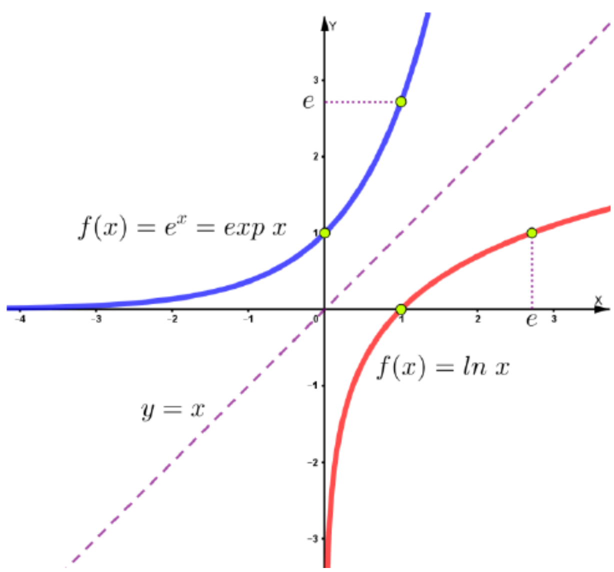
Ej. Simplificar a un solo argumento las siguientes expresiones

$$\frac{1}{2}\ln(x+1) - \ln x\ ;\ \ln(x-2) - \ln(x+2) + 2\ln x\ ;\ \frac{1}{2}\ln(x-9) + \frac{1}{2}\ln x$$

**2.7. La función exponencial, sus propiedades y su representación gráfica. Las funciones logaritmo natural y exponencial, como inversas. Cambio de base.**

Es la función inversa de la función logaritmo natural

$$y = e^x \leftrightarrow x = \ln y$$
$$D_f = \mathbb{R}\,;\ R_f = (0,\infty)$$




La función es siempre positiva y tiene una asíntota horizontal que es el eje x (y=0).

Las principales propiedades de la función ln $x$ son:

$$e^{0} = 1\,;\;\; e^{1} = e\,;\;\; e^{\ln x} = x \;\; \text{con}\; x > 0\,;\;\; e^{a}e^{b} = e^{a+b}\,;\;\; \frac{e^{a}}{e^{b}} = e^{a-b}$$

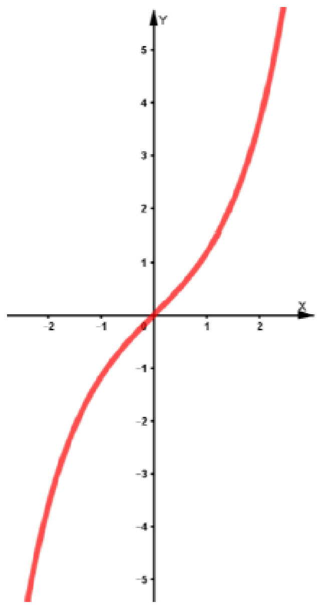
**Cambio de base**

Para toda función logaritmo natural se cumple que $y = \log_a x = \dfrac{\ln x}{\ln a}$

**2.8. Las funciones hiperbólicas, directas e inversas.**

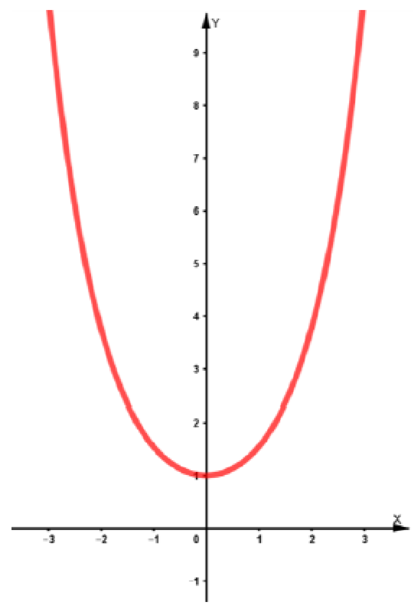
$$f(x) = \operatorname{senh} x = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$

$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = \mathbb{R}$



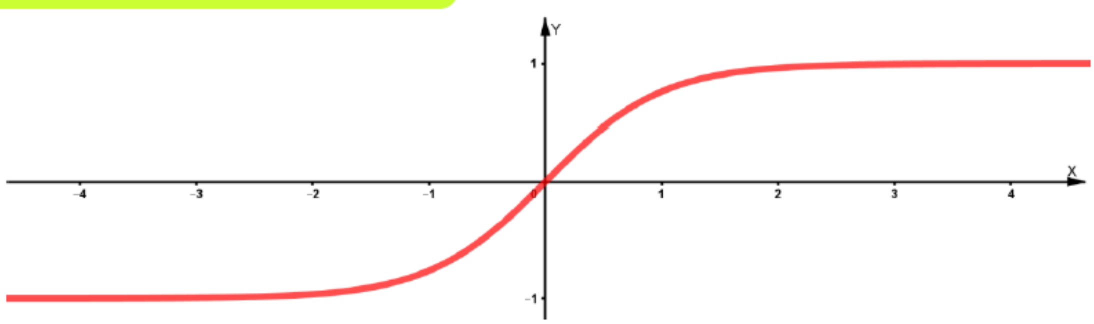
$$f(x) = \cosh x = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = [\,1\,,\infty\,)$



$$f(x) = \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}}$$

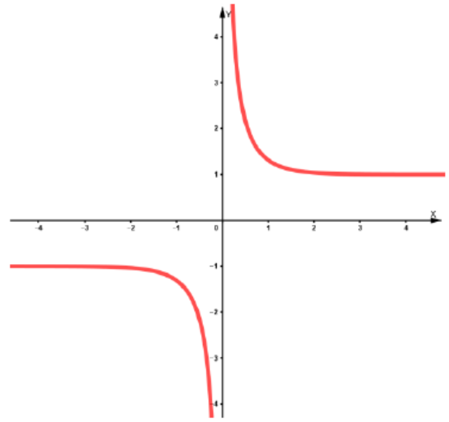
$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = (\,-1\,,1\,)$



$$f(x) = \coth x = \frac{\cosh x}{\operatorname{senh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

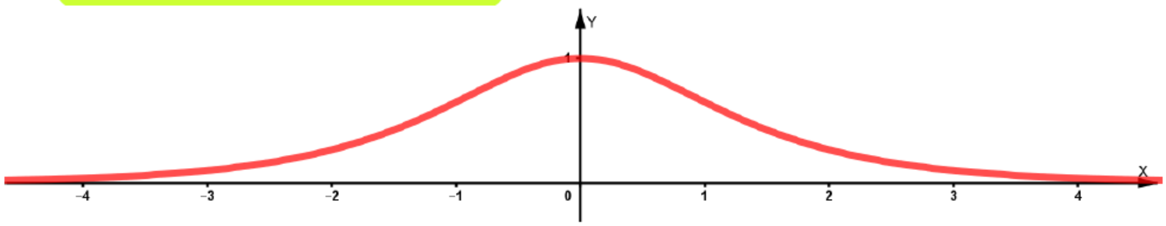
$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

$$R_f = (-\infty\,, -1) \cup (1\,, \infty\,)$$



$$f(x) = \operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

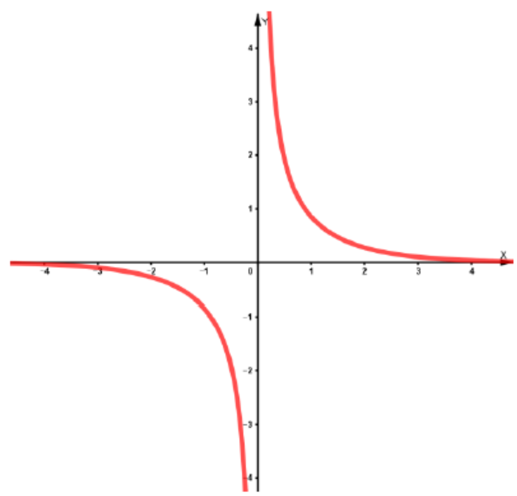
$D_f = \mathbb{R}$ $\qquad R_f = (\,0\,, 1\,]$




$$f(x) = \operatorname{csch} x = \frac{1}{\operatorname{senh} x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

$$D_f = \mathbb{R} - \{0\}$$

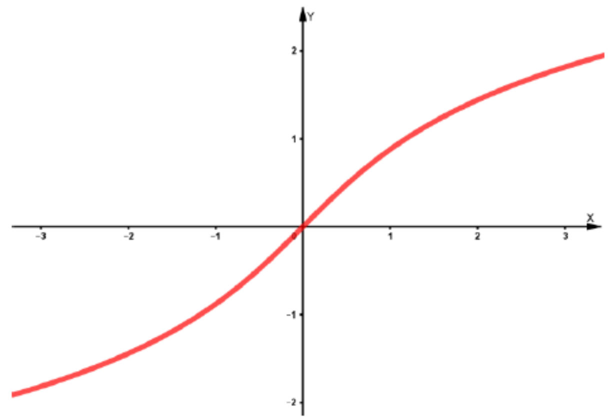
$$R_f = \mathbb{R} - \{0\}$$



$$f(x) = senh^{-1}x$$

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

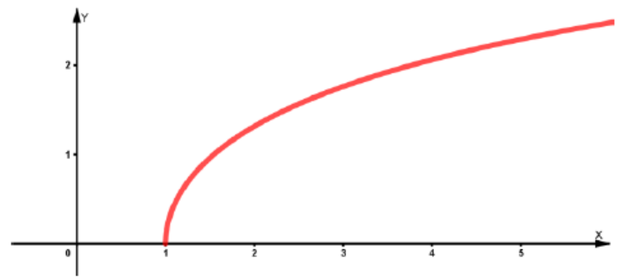
$D_f = \mathbb{R} \qquad R_f = \mathbb{R}$



$$f(x) = cosh^{-1}x$$

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$$

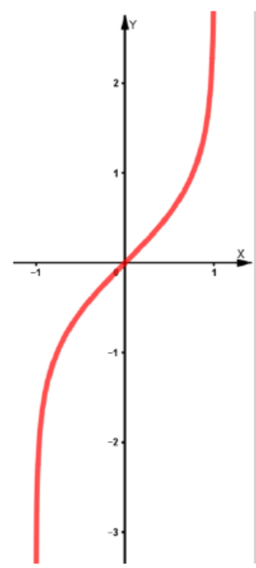
$D_f = [\,1\,,\infty\,) \qquad R_f = [\,0\,,\infty\,)$



$$f(x) = tanh^{-1}x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$D_f = (-1\,,1\,) \qquad R_f = \mathbb{R}$

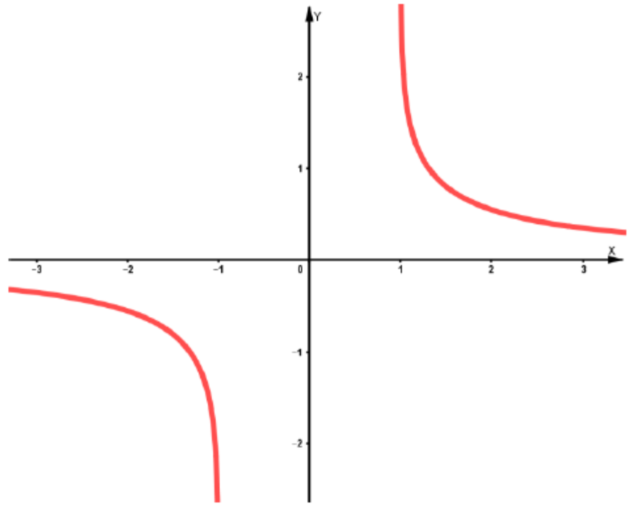


$$f(x) = coth^{-1}x$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$D_f = (-\infty\, , -1\,) \cup (\,1\, , \infty\,)$

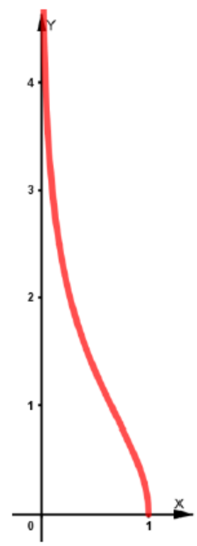
$R_f = \mathbb{R} - \{0\}$




$$f(x) = sech^{-1}x$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right)$$

$D_f = (\,0\, , 1\,]$ $\quad R_f = [\,0\, , \infty\,)$

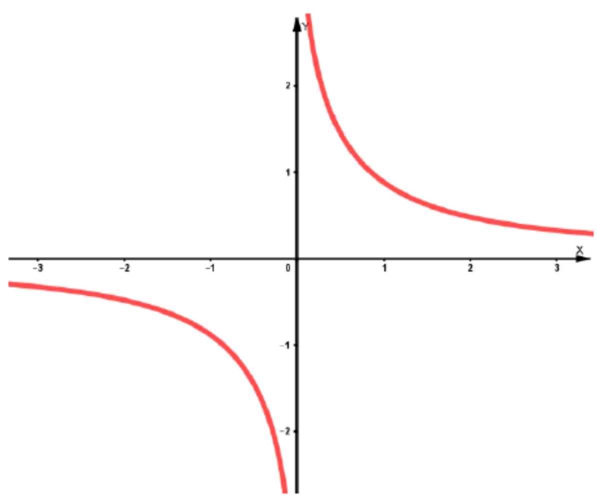



$$f(x) = csch^{-1}x$$

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x^2}}{x}\right)$$

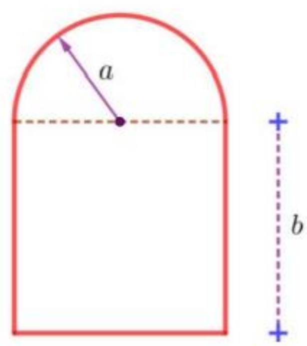
$D_f = (-\infty\, , 0\,) \cup (\,0\, , \infty\,)$

$R_f = \mathbb{R} - \{0\}$

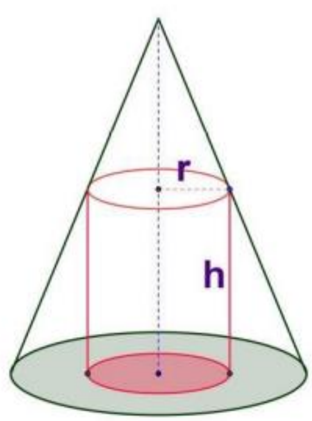


## 2.9. Formulación de funciones como modelos matemáticos de problemas físicos y geométricos

**Ejemplo.** Se requiere construir un túnel con la sección mostrada en la figura. Por restricciones de construcción, debe tener un perímetro de 40 $m$ Determina una función para obtener el área de la sección en términos del radio "**a".**

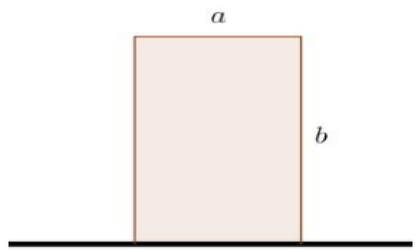



**Ejemplo.** Determina una función que defina el volumen de un cilindro circular recto, inscrito en un cono circular recto que mide 5m de radio y 12m de altura, en términos del radio del cilindro.




**Ejemplo.** Una fábrica tiene capacidad para producir de 0 a 100 televisores diarios. Los gastos generales fijos de la fábrica son de $ 22,000 y el costo directo para producir un televisor es de $ 450. Determina una función para conocer el costo total de producir $x$ televisores al día, y determina otra función para saber el costo unitario medio de un televisor.

**Ejemplo.** Se desea cercar un terreno rectangular de 1,250 $m^2$ de superficie, y uno de sus lados es un muro ya construido. Expresa la longitud de la cerca en términos del lado b únicamente. Indica el dominio de la función.




**Ejemplo.** Determina una función para encontrar la suma de las áreas de un triángulo equilátero y un cuadrado, en términos del lado del triángulo, si sabemos que la suma de sus perímetros es de 210 cm.

**Ejemplo.** Se desea fabricar un recipiente sin tapa con forma de prisma de base cuadrada y cuyo volumen es de 2 $m^3$ . Si el costo del material para la base es $20.00 por cada metro cuadrado y el de los costados es $40.00 por cada metro cuadrado. Formular una función que represente el costo del recipiente, en términos de la longitud de un lado "x" de su base.

**Ejemplo.** Obtener el modelo matemático que represente el área de un rectángulo inscrito en la región R, que se muestra en la figura, en términos de "y"