Capítulo 1. Cónicas

Objetivo: El alumno reafirmará los conocimientos de las secciones cónicas.

Contenido:

1.1. Definición de sección cónica. Clasificación de las cónicas.
1.2. Ecuación general de las cónicas.
1.3. Identificación de los tipos de cónicas a partir de los coeficientes de la ecuación general y del indicador $I = B^2 - 4AC$.
1.4. Ecuación de las cónicas en forma ordinaria.
1.5. Rotación de ejes.

1.1. Definición de sección cónica.

Imagine dos líneas que no son perpendiculares y que se intersectan en un punto V. Si se fija una de las líneas como eje y la otra (el generador) rota alrededor de l eje, entonces el generador forma un *cono circular recto* con vértice en V.

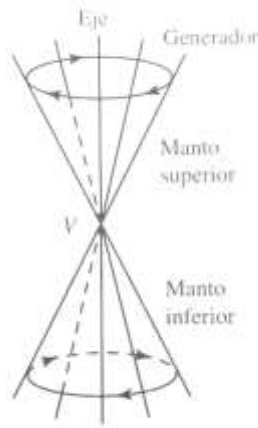

Figura 1.1. Cono circular recto

1.1.1. Clasificación de las cónicas

Una sección cónica (o cónica) es un corte transversal de un cono; en otras palabras, es la intersección de un plano con un cono circular recto. Las tres secciones cónicas básicas son la parábola, la elipse y la hipérbola.

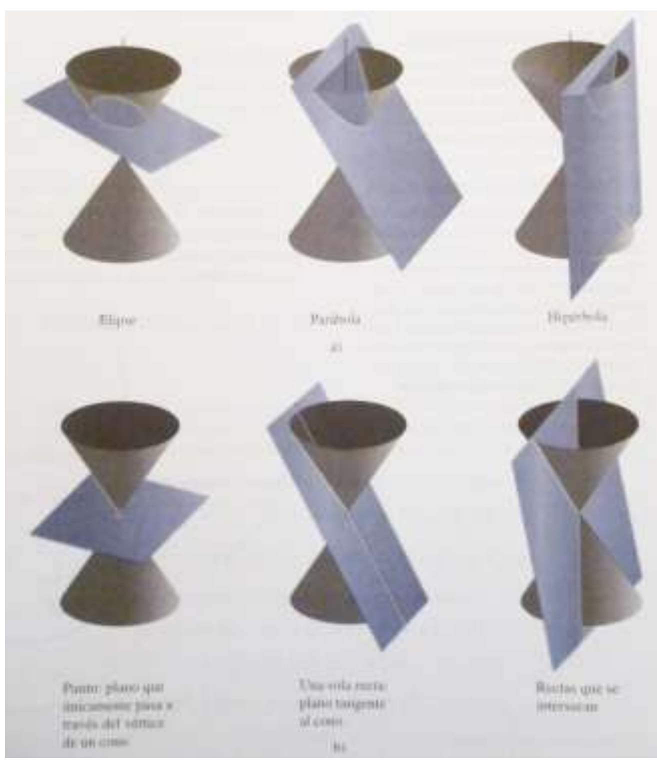

Figura 1.2. Secciones cónicas

1.2. Ecuación general de las cónicas

Las cónicas pueden definirse algebraicamente como las gráficas de ecuaciones de segundo grado (cuadráticas) de dos variables, esto es, como ecuaciones de la forma

$$\mathbf{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Donde A, B y C no son todas cero.

1.3. Identificación de los tipos de cónicas a partir de los coeficientes de la ecuación general y del indicador $I = B^2 - 4AC$.

Las cónicas se pueden identificar calculando $I = B^2 - 4AC$

Si B=0 → $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$

Si A=C → Se trata de una circunferencia
Si A ó C = 0 → Es una parábola
Si A ≠ C y ambas tienen el mismo signo → Se trata de una elipse
Si A y C tienen signos contrarios → se trata de una hipérbola

Ejemplo
$3x^2 + 3y^2 = 11$; Circunferencia
$2x^2 + 5y^2 = 8$; Elipse
$X^2 = 3Y$; Parábola
$Y^2 - X^2 = 4$; Hipérbola

Si B≠0:
Se trata de una parábola si I = 0
Se trata de una elipse si I < 0
Se trata de una hipérbola si I > 0

Ejemplo
La curva $2x^2 - 4xy + 2y^2 - 40x + 20y = 0$, representa:
A= 2, B = 4, C= 2; → $I = (-4)^2 - 4(2)(2) = 0 \therefore$ Se trata de una parábola

Ejemplo
La curva $3x^2 + 2xy + 3y^2 - 8y - 2 = 0$, representa:
A= 3, B = 2, C= 3; → $I = (2)^2 - 4(3)(3) = -32 \therefore$ Se trata de una elipse

Ejemplo
La curva $2x^2 + 3xy - 5y^2 + 7y + 1 = 0$, representa:
A= 2, B = 3, C= -5; → $I = (3)^2 - 4(2)(-5) = 49 \therefore$ Se trata de una hipérbola

1.4. Ecuación de las cónicas en forma ordinaria.

Circunferencia

Definición. La circunferencia es el lugar geométrico de todos los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Forma canónica: $x^2 + y^2 = r^2$

Forma ordinaria: $(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$

Forma general: $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$; con $A=C$

Ejemplo
Determinar las ecuaciones ordinaria y general de la circunferencia con radio 6 y centro en C(3,-4).

Solución:

$$(x-3)^2 + (y+4)^2 = 36 \rightarrow x^2 + y^2 - 6x + 8y - 11 = 0$$

Ejemplo
Determinar la ecuación ordinaria, así como sus características, si su ecuación en forma general es:

$$x^2 + y^2 + 8x - 10y + 34 = 0.$$

Solución:

$$(x+4)^2 + (y-5)^2 = 7;\ C(-4, 5),\ \text{Radio}= \sqrt{7}$$

Parábola

Definición. Una parábola es el conjunto de puntos en un plano que equidistan de una línea particular (la directriz) y de un punto particular (el foco).

La línea que pasa a través del foco y es perpendicular a la directriz es el **eje focal** de la parábola. El eje es la línea de simetría de la parábola. El punto donde la parábola intersecta a su eje es el **vértice** de la parábola. El vértice está localizado en el punto medio entre el foco y la directriz, y es el punto de la parábola que está más cerca del foco y de la directriz.

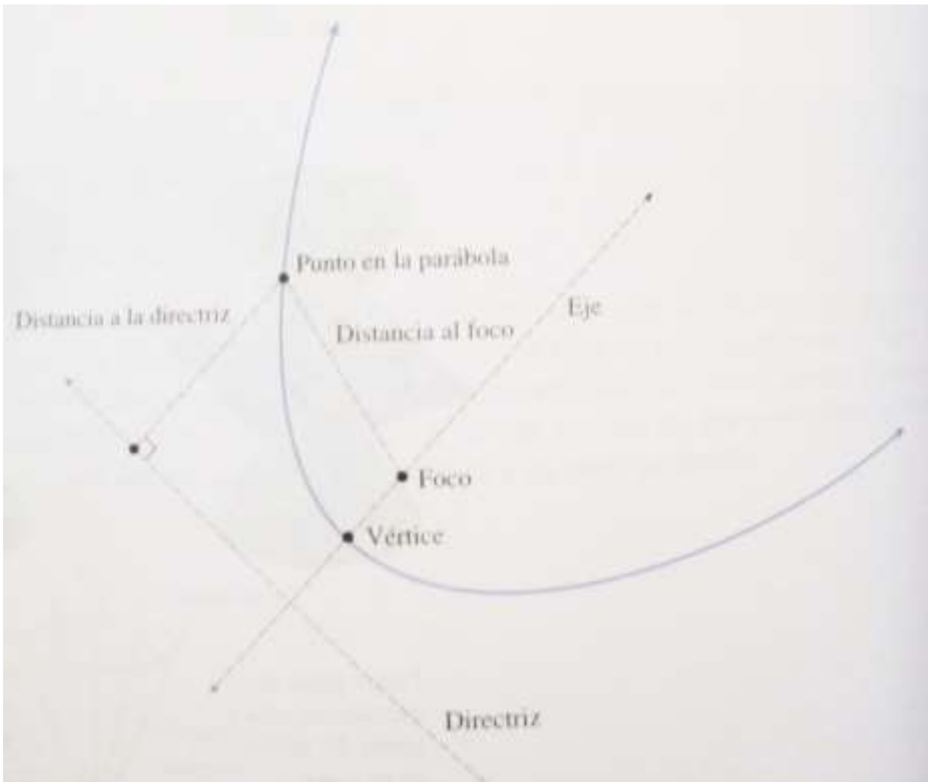

Figura 1.3. Parábola

Ecuaciones canónicas de la parábola:

Parábolas con Vértice en V (0, 0)

Ecuación estándar	$X^2 = 4py$	$Y^2 = 4px$
Abre	Hacia arriba si $p > 0$ Hacia abajo si $p < 0$	Hacia la derecha si $p > 0$ Hacia la izquierda si $p < 0$
Foco	Hacia arriba: F (0, p) Hacia abajo: F (0, – p)	Hacia la derecha: F (p, 0) Hacia la izquierda: F (– p, 0)
Directriz	$y = -p$	$x = -p$
Eje focal	Eje y	Eje x
Longitud focal	P	P
Ancho focal (Lado Recto)	$\|4p\|$	$\|4p\|$

Ecuaciones ordinarias de la parábola:

Parábolas con Vértice en V (h, k)

Ecuación estándar	$(x - h)^2 = 4p\ (y - k)$	$(Y - k)^2 = 4p\ (x - h)$
Abre	Hacia arriba si $p > 0$ Hacia abajo si $p < 0$	Hacia la derecha si $p > 0$ Hacia la izquierda si $p < 0$
Foco	Hacia arriba: $F\ (h, k + p)$ Hacia abajo: $F\ (h, k - p)$	Hacia la derecha: $F\ (h + p, k)$ Hacia la izquierda: $F\ (h - p, k)$
Directriz	$y = k - p$	$x = h - p$
Eje focal	$x = h$	$y = k$
Longitud focal	P	P
Ancho focal (Lado Recto)	$\|4p\|$	$\|4p\|$

Ejemplo

Determinar las ecuaciones ordinaria y general de la parábola con vértice en V(2,6), longitud focal igual a 1 y que abre hacia la izquierda.

Solución:

$$(y-6)^2 = -4\ (x - 2) \rightarrow y^2 + 4x - 12y + 28 = 0$$

Ejemplo

Determinar la ecuación ordinaria de la parábola, así como sus principales características, si su ecuación en forma general es:

$$x^2 - 6x - 8y + 1 = 0.$$

Solución:

$$(x - 3)^2 = 8\ (y+1);\ \text{Abre hacia arriba, } V(3, -1),\ p=2,\ F(3, 1),\ Y = -3$$

Ejemplo

Determinar la ecuación ordinaria de la parábola, así como sus principales características, si su ecuación en forma general es:

$$y^2 - 12x + 8y + 40 = 0.$$

Solución:

$$(y + 4)^2 = 12\ (x-2);\ \text{Abre hacia la derecha, } V(2, -4),\ p=3,\ F(5, -4),\ X = -1$$

Elipse

Definición. Una *elipse* es el conjunto de todos los puntos en un plano cuya distancia a dos puntos fijos en el plano tienen una suma constante. Los puntos fijos son los **focos** de la elipse. La recta que une los focos es el **eje focal**. El punto sobre el eje focal que está en el punto medio entre los dos focos es el **centro**. Los puntos donde la elipse interseca a su eje son los **vértices** de a elipse.

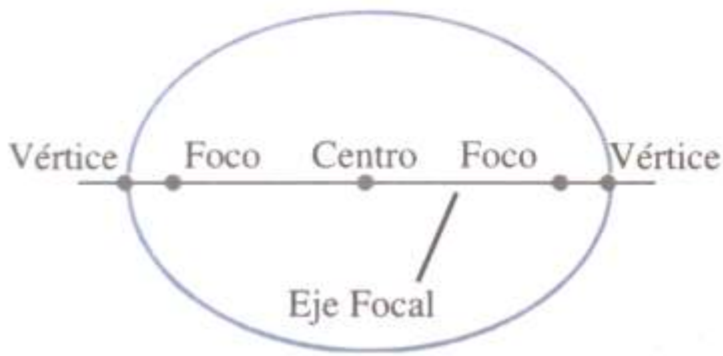

Figura 1.4. Elipse

Ecuaciones canónicas de la elipse:
Elipses con centro en C (0, 0)

Ecuación estándar	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$
Eje focal	Eje x	Eje y
Focos	F (±c, 0)	F (0, ±c)
Vértices	V (±a, 0)	V (0, ±a)
Semieje mayor	a	a
Semieje menor	b	b
Relación pitagórica	$a^2-b^2=c^2$	$a^2-b^2=c^2$

Ecuaciones ordinarias de la elipse:
Elipses con centro en C (h, k)

Ecuación estándar	$\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}+\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Eje focal	y = k	x = h
Focos	F (h ± c, k)	F (h, k ± c)
Vértices	V (h ± a, k)	V (h, k ± a)
Semieje mayor	a	a
Semieje menor	b	b
Relación pitagórica	$a^2-b^2=c^2$	$a^2-b^2=c^2$

Ejemplo
Determinar las ecuaciones ordinaria y general de la elipse con centro en C(-1,-2), semi eje mayor paralelo a el eje x que mide 4 unidades y semi eje menor paralelo al eje y que mide 3 unidades.

Solución:

$$\frac{(x+1)^2}{16} + \frac{(y+2)^2}{9} = 1 \rightarrow 9x^2 + 16y^2 + 18x + 64y - 71 = 0$$

Ejemplo
Determinar las ecuaciones ordinaria y general de la elipse con centro en C(2,-4), semi eje mayor paralelo a el eje y que mide 5 unidades y semi eje menor paralelo al eje x que mide 2 unidades.

Solución:

$$\frac{(y+4)^2}{25} + \frac{(x-2)^2}{4} = 1 \rightarrow 25x^2 + 4y^2 - 100x + 32y + 64 = 0$$

Ejemplo
Determinar la ecuación ordinaria de la elipse, así como sus principales características, si su ecuación en forma general es:

$$x^2 + 4y^2 - 6x + 8y + 9 = 0.$$

Solución:

$$\frac{(x-3)^2}{4} + (y+1)^2 = 1$$

Ejemplo
Determinar la ecuación ordinaria de la elipse, así como sus principales características, si su ecuación en forma general es:

$$9x^2 + 4y^2 - 18x - 16y - 11 = 0.$$

Solución:

$$\frac{(y-2)^2}{9} + \frac{(x-1)^2}{4} = 1$$

Hipérbola

Definición. Una *hipérbola* es el conjunto de puntos en un plano cuya diferencia de sus distancias a dos puntos fijos en el plano es constante. Los puntos fijos son los **focos** de la hipérbola. La línea que une los focos es el **eje focal**. El punto medio entre los focos es el **centro**. Los puntos donde la hipérbola se interseca con su eje focal son los **vértices** de a hipérbola.

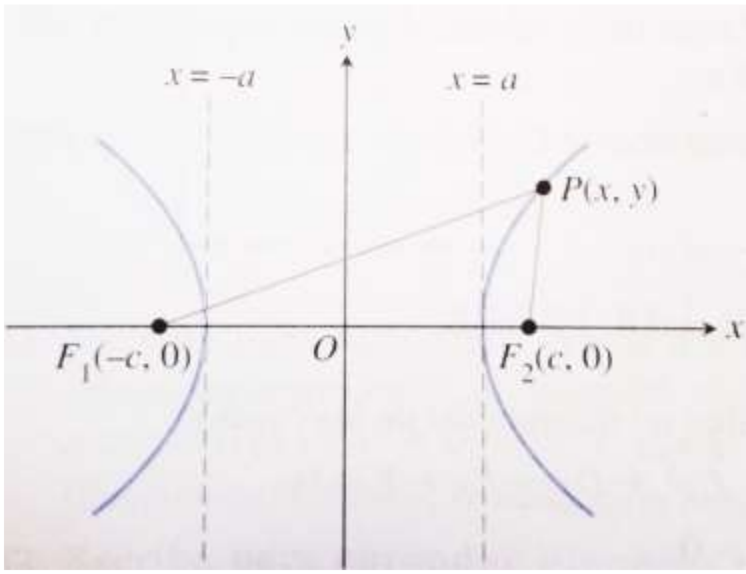

Figura 1.5. Hipérbola

Ecuaciones canónicas de la hipérbola:
Hipérbola con centro en C (0, 0)

Ecuación estándar	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$
Eje focal	Eje x	Eje y
Focos	F (±c, 0)	F (0, ±c)
Vértices	V (±a, 0)	V (0, ±a)
Semieje transversal	a	a
Semieje conjugado	b	b
Relación pitagórica	$a^2 + b^2 = c^2$	$a^2 + b^2 = c^2$
Asíntotas	y = ± $\frac{b}{a}x$	y = ± $\frac{a}{b}x$

Ecuaciones ordinarias de la hipérbola:
Hipérbola con centro en C (h, k)

Ecuación estándar	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
Eje focal	Y=k (Paralelo al eje x)	X = h (Paralelo al eje y)
Focos	F (h ± c, k)	F (h, k ± c)
Vértices	V (h ± a, k)	V (h, k ± a)
Semieje transversal	a	a
Semieje conjugado	b	b
Relación pitagórica	$a^2+b^2=c^2$	$a^2+b^2=c^2$
Asíntotas	y = $\pm\frac{b}{a}(x-h)+k$	y = $\pm\frac{a}{b}(x-h)+k$

Ejemplo
Determinar las ecuaciones ordinaria y general de la hipérbola con centro en C(-3,-7), semi eje transversal paralelo a el eje x que mide 3 unidades y semi eje conjugado paralelo al eje y que mide 2 unidades.

Solución:

$$\frac{(x+3)^2}{9}-\frac{(y+7)^2}{4}=1 \rightarrow 4x^2 - 9y^2 + 24x - 126y - 441 = 0$$

Ejemplo
Determinar la ecuación ordinaria de la hipérbola, así como sus principales características, si su ecuación en forma general es:

$$-4x^2 + y^2 - 16x - 2y - 19 = 0.$$

Solución:

$$\frac{(y-1)^2}{4}-(x+2)^2=1$$

Ejemplo
Determinar la ecuación ordinaria de la hipérbola, así como sus principales características, si su ecuación en forma general es:

$$4x^2 -16y^2 - 64y - 128 = 0.$$

Solución:

$$\frac{(x)^2}{16}-\frac{(y+2)^2}{4}=1$$

Rotación de ejes coordenados

Definición. Al cambio de posición de los ejes en el plano coordenado, a partir de un giro en sentido antihorario, conservando el mismo origen de coordenadas y los ejes con el mismo sentido, se le conoce como rotación de ejes coordenados.

Ecuaciones de transformación

$$\mathbf{x = x'cos\theta - y'sen\theta}$$
$$\mathbf{y = x'sen\theta + y'cos\theta}$$

Ejemplo
Obtener las coordenadas del punto P(1,-2), en un sistema rotado 45°

Solución:
Después de sustituir el valor de x=1, y=-2, y θ = 45° en las ecuaciones de transformación, se resuelve el sistema de ecuaciones lineales y se llega a:

$$P'\left(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{-3\sqrt{2}}{2}\right)$$

Ejemplo
Eliminar el termino XY de la siguiente ecuación, determinar el ángulo de giro, escribir la nueva ecuación e identificar a la cónica, si la ecuación en su forma general es:

2xy = 1

Solución:

$$(x')^2 - (y')^2 = 1\ ;\ \therefore \text{ Se trata de una hipérbola con eje focal (transversal) en X}$$

Ejemplo
Eliminar el termino XY de la siguiente ecuación, determinar el ángulo de giro, escribir la nueva ecuación e identificar a la cónica, si la ecuación en su forma general es:

$$x^2 + xy + y^2 = 4$$

Solución:

$$\left(\frac{x'}{2\sqrt{\frac{2}{3}}}\right)^2 - \left(\frac{y'}{2\sqrt{2}}\right)^2 = 1\ ;\ \therefore \text{ Se trata de una elipse con eje focal en Y}$$