Álgebra

Capítulo 6

Matrices y determinantes

Objetivo

El alumno aplicará los conceptos fundamentales de las matrices, determinantes y sus propiedades a problemas que requieran de ellos para su resolución.

Tema	Contenido
6.1	Definición de matriz y de igualdad de matrices. Operaciones con matrices y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación por un escalar y multiplicación. Matriz identidad.
6.2	Definición y propiedades de la inversa de una matriz. Cálculo de inversa por transformaciones elementales.
6.3	Ecuaciones matriciales y su resolución. Representación y resolución matricial de los sistemas de ecuaciones lineales.
6.4	Matrices triangulares, diagonales y sus propiedades. Definición de traza de una matriz y sus propiedades.
6.5	Transposición de una matriz y sus propiedades. Matrices simétricas, antisimétricas y ortogonales. Conjugación de una matriz y sus propiedades. Matrices hermitianas, antihermitianas y unitarias. Potencia de una matriz y sus propiedades.
6.6	Definición de determinante de una matriz y sus propiedades. Cálculo de determinantes: Regla de Sarrus, desarrollo por cofactores y método de condensación. Cálculo de la inversa por medio de la adjunta. Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de orden superior a tres.

Matrices y determinantes

Apuntes de Clase,

M.I. José Francisco Salgado Rodríguez

Definición de matriz

Una matriz de m x n con elementos en $\mathbb{C}$ es un arreglo de la forma:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

donde $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{mn} \in \mathbb{C}$ y $\mathrm{m}, \mathrm{n} \in \mathbb{Z}$.

En forma abreviada, M= [a_{ij}] con i= 1, ..., m; j= 1, ..., n.

De forma coloquial podemos decir que una matriz es un arreglo rectangular de elementos matemáticos: polinomios, funciones, números, etc.

Con base en la definición anterior, se muestran algunos ejemplos de matrices:

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{3}\mathrm{i} & 0 \\ -8 & \pi \\ 4 & \mathrm{i} \end{bmatrix}_{3x2} \quad \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}_{1x3} \quad \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}_{3x1} \quad \mathrm{D} = \begin{bmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Igualdad de matrices

Definición. Sean A= [a_{ij}] y B= [b_{ij}] dos matrices de orden m x n con elementos en $\mathbb{C}$. A y B son iguales si: $a_{ij} = b_{ij}$; con i= 1, ..., m; j= 1, ..., n.

Operaciones matriciales

En esta primera parte del capitulo se estudiarán las operaciones:

1. Suma
2. Resta
3. Multiplicación de un escalar por una matriz
4. Multiplicación de matrices
5. Inversa

Suma de matrices

Si A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y B= $[b_{ij}]_{mxn}$ entonces A+B=S= $[s_{ij}]_{mxn}$ donde $s_{ij}= a_{ij} + b_{ij}$ para i= 1, ..., m; j= 1, ..., n.

Ej. Sumar las siguientes matrices (en caso de que se pueda):

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 1+i \\ -2i & 4 \end{bmatrix}_{3x2} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -i \\ 3 & -4 \end{bmatrix}_{3x2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2i \\ 7+i & 0 & 3 \end{bmatrix}_{2x3}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \\ 3-2i & 0 \end{bmatrix}_{3x2}$$

A + C y B + C no se pueden efectuar ∴ NO son conformables para la adición de matrices.

Propiedades de la adición de matrices

i) A + (B+C) = (A+B) + C — Asociatividad
ii) A + B = B + A — Conmutatividad
iii) A+ 0 = A (Matriz nula del mismo orden) — Elemento idéntico
iv) A + (-A) =0 — Elemento inverso

Resta de matrices

Si A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y B= $[b_{ij}]_{mxn}$ entonces A - B se define como A + (-B).

Multiplicación por un escalar

Sea A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$. El producto αA es una matriz de m x n definida por: $\alpha A = \alpha a_{ij}$

Teorema

Si A y B son dos matrices de m x n con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entonces:

i) α (A+B)= αA+αB
ii) (α+β)A= αA+βA
iii) α(βA)= ($\alpha\beta$)A

Multiplicación de matrices

Si A= $[a_{ij}]_{mxn}$ y B= $[b_{ij}]_{nxq}$ entonces AB= $[p_{ij}]_{mxq}$ donde:

$$p_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} \quad \text{para } i = 1, \ldots, m; \; j = 1, \ldots, q.$$

Ej. Obtener la multiplicación de matrices AB, BA, AC, CA, BC y CB, si:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & -3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}_{4x3} \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}_{3x2} \quad C = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 1 & -4 \end{bmatrix}_{2x4}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & 9 \\ 0 & -5 \\ -5 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}_{4x2} ; \; BC = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 0 & 6 \\ 3 & -18 & 4 & -25 \\ 1 & -11 & 3 & -15 \end{bmatrix}_{3x4} ; \; CA = \begin{bmatrix} -2 & -4 & 4 \\ -6 & 1 & -2 \end{bmatrix}_{2x3}$$

Nota: Como se pudo observar en el ejemplo anterior, la multiplicación de matrices NO siempre es conmutativa.

Ej. Demostrar que las matrices A, B y C son conmutables para la multiplicación.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix}$$

Teorema. Sean A, B y C matrices de m x n, n x p y p x q respectivamente, cuyos elementos son números complejos, entonces: A(BC) = (AB)C.

Ej. Demostrar que las matrices A, B y C cumplen con la asociatividad para la multiplicación.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Demostrar que A(BC) = (AB)C

Teorema. Sean A, B y C matrices de mxn, nxp y pxq respectivamente, y D, E, F, matrices de mxn, mxn y nxp respectivamente, cuyos elementos son números complejos, entonces:
i) A(B+C) = AB + AC
ii) (D+E)F = DF + EF

Matriz identidad
Se conoce como "matriz identidad" de orden n a una matriz cuadrada de n x n de la forma:

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}$$

Se llama matriz identidad de orden n, a la matriz cuadrada de orden n, $I_n=[\delta_{ij}]$, tal que:

$$\delta_{ij} = 1, \qquad \text{si } i = j$$
$$\delta_{ij} = 0, \qquad \text{si } i \neq j$$

Nota: La matriz identidad constituye el elemento idéntico en la multiplicación de matrices.

Teorema. Si A es una matriz con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:
i) $I_mA = A$
ii) $AI_n = A$

Inversa de una matriz
Sea A una matriz de n x n con elementos en C. Una matriz X se dice que es inversa de A si:

$$XA = I_n = AX$$

y se representa con A^{-1}.

Nota:

1. Para que una matriz A tenga inversa, es condición necesaria que sea cuadrada. A^{-1} deberá ser cuadrada y del mismo orden que A.
2. NO todas las matrices cuadradas tienen inversa (det A = 0).
3. Matriz $\begin{cases} \text{Singular } (\nexists\ A^{-1}) \\ \\ \text{No singular } (\exists\ A^{-1}) \end{cases}$
4. Si existe la inversa de una matriz cuadrada, ésta es única (unicidad).

Teorema: Si A y B son dos matrices no singulares del mismo orden y $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces:

i) A^{-1} es única

ii) $(A^{-1})^{-1} = A$

iii) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

iv) $(\lambda A)^{-1} = \frac{1}{\lambda}A^{-1}$, si $\lambda \neq 0$

Cálculo de la inversa por transformaciones elementales.

$$[A|I_n] \to T_1 \dots \to T_k \to [I_n|A^{-1}]$$

Transformaciones elementales

- Intercambiar dos renglones.
- Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero.
- Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero y sumarlo a otro renglón, reemplazando este último por el resultado obtenido.

Ej. Obtener las inversas de las siguientes matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};\quad A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & 9 \\ -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 6 & 1 \\ -1 & -4 & 2 \end{bmatrix};\quad B^{-1} = \begin{bmatrix} 16 & -6 & 3 \\ -5 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} i & -1 & 2 \\ 0 & 2-i & 1+3i \\ 0 & 1 & i \end{bmatrix};\quad C^{-1} = \begin{bmatrix} -i & 2+i & -5-i \\ 0 & -1 & 3-i \\ 0 & -i & 1+2i \end{bmatrix}$$

Ej. Obtener la solución de las siguientes ecuaciones matriciales:

1. **AX+B = 3X** si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
2. **AX = B** si $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$
3. **XA+B = C** si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Ej. Obtener la solución de las siguientes ecuaciones matriciales:

4. Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}; C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, calcular:
   - **a) XA = B+I**
   - **b) AX+B = C**
   - **c) XA+B = 2C**
   - **d) AX+BX=C**
   - **e) XAB-XC=2C**

Ej. Resolver la siguiente ecuación matricial:

AX + 2B = 3C

Si $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix};\ B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};\ C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -5 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix}$$

Representación matricial de un sistema de ecuaciones lineales .

Dada la ecuación matricial AX = B, donde:
A- Matriz de coeficientes
X- Vector de incógnitas
B- Vector de términos independientes.
Se despeja a la matriz de incógnitas ("X"), quedando la ecuación: $\mathbf{X = A^{-1}B}$

Ej. Resolver el siguiente sistema a través de álgebra matricial.

$$\begin{aligned} x + \quad\ 3z &= 2 \\ y - 2z &= -1 \\ x + y + 2z &= 3 \end{aligned}$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}; X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}; \text{Solución: } A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ -2 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\ X = \begin{bmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Ej. Resolver en forma matricial el sistema:

$$\begin{aligned} x + y + z &= 6 \\ x + 2y + 5z &= 12 \\ x + 4y + 25z &= 36 \end{aligned}$$

Regiones de una matriz cuadrada

$$M = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Triángulo superior

Triángulo inferior

Diagonal principal

Traza de una matriz cuadrada

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de n x n con elementos en ℂ. Se llama traza de A y se representa con Tr(A), al número:

$$\mathrm{Tr(A)} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Tipos especiales de matrices cuadradas

Matrices triangulares

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de n x n con elementos en ℂ. Se dice que:

i) A es triangular superior si $a_{ij} = 0$ para i > j.

ii) A es triangular inferior si $a_{ij} = 0$ para i < j.

Teorema. Si A y B son dos matrices triangulares superiores (inferiores) del mismo orden y a ∊ ℂ, entonces:

i) A+B es triangular superior (inferior)

ii) αA es triangular superior (inferior)

iii) AB es triangular superior (inferior)

Matriz diagonal

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de n x n con elementos en ℂ. Se dice que A es una matriz diagonal si a_{ij}= 0 para i≠j, y se representa como:

$$\mathrm{diag}\ (a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})$$

Nota: Los elementos fuera de la diagonal son nulos y distintos entre sí.

Teorema. Si A y B son dos matrices diagonales tales que A= diag ($a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$) y B= diag ($b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{nn}$) y α ∊ C, entonces:

i) A+B = diag ($a_{11}+ b_{11}, a_{22}+ b_{22}, \ldots, a_{nn}+ b_{nn}$)

ii) α A = diag ($\alpha\, a_{11}, \alpha\, a_{22}, \ldots, \alpha\, a_{nn}$)

iii) AB = diag ($a_{11}b_{11}, a_{22}b_{22}, \ldots, a_{nn}b_{nn}$)

iv) A^{-1} = diag ($1/a_{11}, 1/a_{22}, \ldots, 1/a_{nn}$), si A es no singular.

Matriz escalar

Los elementos fuera de la diagonal son nulos e iguales entre sí, pero diferentes de la unidad.

$$M = \begin{bmatrix} \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \alpha \end{bmatrix} = \alpha \mathrm{I}_\mathrm{n}$$

Operaciones matriciales

1. Transposición: A → A^T
Si A = A^T → se tiene una matriz simétrica
Si A = -A^T → se tiene una matriz antisimétrica

2. Conjugación: A → $\overline{A}$
Si A = $\overline{A}$ → se tiene una matriz real
Si A = - $\overline{A}$ → se tiene una matriz imaginaria

3. Conjugación-Transposición: A→ A^*
Si A = A^* → se tiene una matriz hermitiana
Si A=-A^* → se tiene una matriz antihermitiana

4. Potencia enésima: A→ A^n
- Idempotente
- Involutoria
- Nilpotente
- Periodica

Transposición: A→ A^T

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de mxn con elementos en $\mathbb{C}$. Se llama transpuesta de A a la matriz de nxm:

$$\mathbf{A^T} = [\mathbf{C_{ij}}], \qquad \text{tal que } \mathrm{C_{ij}} = \mathrm{a_{ij}}$$

Nota: Los renglones de A^T son las columnas de A y las columnas de A^T son los renglones de A.

Ej. Transposición

$$\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 0 & -\mathrm{i} \\ 5 & 1 & 1-3\mathrm{i} \end{bmatrix} \rightarrow \mathrm{A^T} = \begin{bmatrix} 2\mathrm{i} & 5 \\ 0 & 1 \\ -\mathrm{i} & 1-3\mathrm{i} \end{bmatrix}$$

Propiedades de la transposición

Teorema. Si A y B son dos matrices con elementos en C y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) $(A^T)^T = A$

ii) $(\alpha A)^T = \alpha A^T$

iii) $(A+B)^T = A^T+B^T$ si $\exists$ A+B

iv) $(AB)^T = B^T A^T$ si $\exists$ AB

Matrices simétricas y antisimétricas (matrices cuadradas)

Definición. Sea A una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$, se dice que:

i) A es simétrica si $A^T = A$

ii) A es antisimétrica si $A^T = -A$

Ej. Matriz simétrica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix}; \; A = A^T; \; a_{ij} = a_{ji} \; \forall \, i,j$$

Ej. Matriz antisimétrica

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & -2+i \\ 5 & 0 & i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix}; \; B = -B^T; \; b_{ij} = -b_{ji} \; \forall \, i \neq j; \text{Si } i = j, b_{ii} = 0$$

Propiedades de las matrices simétrica y antisimétrica.

Teorema. Si A y B son dos matrices simétricas (antisimétricas) de nxn y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) A+B es simétrica (antisimétrica)

ii) αA es simétrica (antisimétrica)

Teorema. Si A es una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) $A+A^T$ es simétrica

ii) $A-A^T$ es antisimétrica

Conjugación: $A \rightarrow \overline{A}$

Definición: Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de mxn con elementos en $\mathbb{C}$. Se llama conjugada de A a la matriz de mxn $\overline{A} = [c_{ij}]$ tal que $c_{ij} = \overline{a_{ij}}$.

Ej. Conjugación

$$A = \begin{bmatrix} 2i & 0 & -i \\ 5 & 1 & 1-3i \end{bmatrix}, \; \overline{A} = \begin{bmatrix} -2i & 0 & i \\ 5 & 1 & 1+3i \end{bmatrix}$$

Teorema. Si A y B son dos matrices con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) $\overline{(\overline{A})} = A$
ii) $\overline{\alpha A} = \overline{\alpha}\,\overline{A}$
iii) $\overline{A + B} = \overline{A} + \overline{B}$ si $\exists\, A + B$
iv) $\overline{AB} = \overline{A}\,\overline{B}$ si $\exists\, AB$

Matrices reales e imaginarias

Definición. Sea A una matriz de mxn con elementos en $\mathbb{C}$, se dice que:

i) A es real si $\overline{A} = A$
ii) A es imaginaria si $\overline{A} = -A$

Teorema. Si A es una matriz de mxn con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) $A + \overline{A}$ es real
ii) $A - \overline{A}$ es imaginaria

Conjugación-Transposición: A $\rightarrow A^*$

Definición. La conjugación transposición de una matriz (A^*) está definida como:

$$A^* = (\overline{A})^T = \overline{(A^T)}$$

Propiedades de la conjugación transposición

Teorema. Si A y B son dos matrices con elementos en $\mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces:

i) $(A^*)^* = A$
ii) $(\alpha A)^* = \overline{\alpha} A^*$
iii) $(A + B)^* = A^* + B^*$ si $\exists\, A + B$
iv) $(AB)^* = B^* A^*$ si $\exists\, AB$

Matrices hermitianas y antihermitianas (matrices cuadradas)

Definición. Sea A una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$, se dice que:

i) A es hermitiana si $A^* = A$
ii) A es antihermitiana si $A^* = -A$

Ej. Matriz hermitiana

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2+i \\ 5 & 3 & i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix} ;\ a_{ij} = \overline{a_{ji}}\ \forall\, i, j\ ;\ I(a_{ii}) = 0\ ,\ \text{Diagonal principal: } \mathbb{R}$$

Ej. Matriz antihermitiana

$$B = \begin{bmatrix} -i & -5 & -2-i \\ 5 & 3i & -i \\ 2-i & -i & 0 \end{bmatrix} ;\ b_{ij} = -\overline{b_{ji}}\ \forall\, i, j\ ; R(a_{ii}) = 0\ , \text{Diagonal principal: I}$$

Teorema. Si A es una matriz de mxn con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) AA^* es hermitiana
ii) A^*A es hermitiana
iii) $A + A^*$ es hermitiana (nxn)
iv) $A - A^*$ es antihermitiana (nxn)

Potencia enésima

Una matriz se multiplicará por sí misma, el número de veces que indique su exponente.

Teorema. Sea A una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$ y $m, n \in \mathbb{N}$, entonces:

i) $A^m A^n = A^{m+n}$
ii) $(A^m)^n = A^{mn}$

Una matriz A no singular se dice que:

i) Es ortogonal si: $A^T = A^{-1}$
ii) Es unitaria si: $A^* = A^{-1}$

Dependiendo el resultado obtenido al realizar la potencia de matrices, estas se pueden clasificar en: idempotentes, involutorias, nilpotentes y periódicas.

Matriz idempotente. Una matriz de nxn es idempotente si se verifica que $\mathbf{A^2 = A}$. La matriz debe ser simétrica para ser idempotente, no todas las matrices simétricas son idempotentes.

Ej. Matriz idempotente

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

Matriz involutoria. Una matriz de nxn es involutoria si se verifica que $\mathbf{A^2 = I_n}$.

Ej. Matriz involutoria

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz nilpotente. Una matriz de nxn es nilpotente si se verifica que $\mathbf{A^2 = 0}$ (matriz nula).

Ej. Matriz nilpotente

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix};\ A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Matriz periódica. Una matriz cuadrada A es periódica si existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $A^{(p+1)} = A$. Además, si p es el menor número natural que cumple $A^{(p+1)} = A$ se dice que A es periódica con periodo p.

Ej. Matriz periódica

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix};\ A^3 = A^2A\ ;\ A^2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\ ;\ A^3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Determinantes

El concepto de determinante surge antes que el concepto de matriz, en 1750 los trabajos de Cramer orientados a la resolución de sistemas de ecuaciones lineales dan como resultado el concepto de determinante.

Notas:

1. La matriz es un arreglo de números.
2. El determinante es un número.

Propiedades de un determinante

Teorema. Sea $A=[a_{ij}]$ una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$:

1) Si los elementos de una línea de A (renglón o columna) son todos nulos, entonces det A= 0.
2) Si B se obtiene de A multiplicando los elementos de una de sus líneas por un número $\lambda \in \mathbb{C}$ entonces det B = λ det A.
3) Si B se obtiene de A intercambiando 2 líneas paralelas (renglones o columnas), entonces det B = -det A.
4) Si dos líneas paralelas de A son proporcionales, entonces det A = 0.
5) Si B se obtiene de A sumando a los elementos de una línea, los elementos de una línea paralela multiplicados por un número $\lambda \in \mathbb{C}$, entonces det B = det A.

Teorema. Si $A=[a_{ij}]$ y $B=[b_{ij}]$ son dos matrices de nxn con elementos en $\mathbb{C}$, entonces:

i) $\det A = \det A^T$
ii) $\det \lambda A = \lambda^n \det A$
iii) $\det AB = \det A \det B$

Cálculo de determinantes

Regla de Sarrus

Este método se emplea únicamente para calcular determinantes de segundo y tercer orden.

Segundo orden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

Tercer orden:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Ej. Determinar el valor de det A y det B.

$$A = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}\ ;\ \det A = -7 \quad B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -4 & 5 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix};\ \det B = -5$$

Regla de Cramer para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Para encontrar los valores de las incógnitas de sistemas de ecuaciones lineales de orden 2 y 3, se requiere un cociente de determinantes.
El numerador es el determinante que resulta al remplazar en la matriz de coeficientes, la columna de la incógnita por el vector de términos independientes.
El denominador es el determinante asociado a la matriz de coeficientes.

Ej. Resolver a través de la regla de Cramer los siguientes sistemas.

a) 5X+3Y = 5
4X+7Y = 27

detA = 23 ; X=-2, Y=5

b)

$$\frac{X+1}{5} = \frac{Y-2}{7}$$

$$\frac{X+4}{3} - \frac{Y-9}{6} = \frac{8}{3}$$

det A = 3 ; X = 4, Y = 9

c) 2X+3Y+4Z = 260
X+4Y+8Z = 330
4X+8Y+6Z = 510

det A = -34 ; X = 50, Y = 20, Z = 25

Desarrollo por cofactores

Aplicable al cálculo de determinantes de cualquier orden y es el fundamento de todos los métodos de aplicación práctica.

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$.
i) Se llama "menor" (Mij) del elemento aij, al determinante de la matriz que se obtiene suprimiendo en A al renglón ' i ' y a la columna ' j '.
ii) Se llama cofactor (Cij) del elemento aij, al producto:

$$\mathbf{C_{ij}} = (-\mathbf{1})^{\mathbf{i+j}}\ \mathbf{M_{ij}}$$

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de mxn con elementos en $\mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{Z}$, tal que $1 \le r \le n$, entonces:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{rj}c_{rj} \quad ó \quad \det A = \sum_{i=1}^{n} a_{ir}c_{ir}$$

Ej. Calcular el determinante de la matriz A, utilizando el método por cofactores.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -5 & 2 \\ 4 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 0 \\ -1 & 6 & -7 & 1 \end{bmatrix}$$

det A = $2C_{32} - C_{33}$ = 27

Cálculo de la inversa por medio de la matriz adjunta

Definición. Sea A=[a_{ij}] una matriz de nxn con elementos en $\mathbb{C}$ y sea Cij el cofactor del elemento aij. Se llama matriz adjunta de A, a la matriz:

Adj A = [bij], donde bij = Cji

Ej. Obtener la adjunta de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\text{Adj A} = C_{ji} = \begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} ; \ A \text{ Adj } A = 6I_3 ; \ \det A = 6 ; \ \therefore A \text{ Adj}A = (\det A)I_n$$

Teorema. Si A es una matriz de nxn con elementos en C, entonces:

A(Adj A)=(Adj A)A = (det A) In

Teorema. A^{-1} existe si y solo si $\det A \neq 0$.

$$A(\text{Adj } A) = (\det A)I_n; \ \ I_n = \frac{1}{\det A}(A(\text{Adj } A)) ; \ \ \mathbf{A^{-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{\det A}}\textbf{Adj A}$$

Ej. Obtener la inversa de la matriz A.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 8 & -4 & 2 \\ 5 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Un poco de humor