Álgebra

Objetivo
El alumno formulará, como modelo matemático de problemas, sistemas de ecuaciones lineales y los resolverá aplicando el método de Gauss.

Tema	Contenido
5.1	El sistema de ecuaciones lineales como modelo matemático de problemas. Definición de ecuación lineal y de su solución. Definición de sistema de ecuaciones lineales y de su solución. Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales en cuanto a la existencia y al número de soluciones. Sistemas homogéneos, soluciones triviales y varias soluciones.
5.2	Sistemas equivalentes y transformaciones elementales. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de Gauss.

Capítulo 5

Sistemas de ecuaciones lineales

Sistemas de ecuaciones lineales

Apuntes de Clase,

M.I. José Francisco Salgado Rodríguez

Definición. Un sistema de m ecuaciones con n incógnitas sobre **C** es una expresión de la forma:

$$a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1$$
$$a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2$$

$$a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m$$

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

- Compatibles (Con solución)
  - Determinados (única)
  - Indeterminados (múltiples)
- Incompatibles (Sin solución)

Interpretación geométrica de los sistemas de orden 2 y orden 3

Orden 2: Cada ecuación representa una línea recta, estas pueden:
a) Intersecarse en un punto (sistema compatible determinado)
b) Ser coincidentes (sistema compatible indeterminado)
c) Ser paralelas (sistema incompatible)

Orden 3: Cada ecuación representa un plano, estos pueden:
a) Intersecarse en un punto (sistema compatible determinado)
b) Intersecarse formando una recta (sistema compatible indeterminado)
c) Ser paralelos, formar tres rectas o una recta y un plano paralelo (sistema incompatible)

Sistemas homogéneos

Es un sistema en el cual TODOS los términos independientes son cero, es siempre compatible y acepta la solución "trivial" en la cual:

$$X_1 = X_2 = \ldots = X_n = 0$$

Método de Gauss

Objetivo: Llegar aun sistema escalonado.
Procedimiento: Transformar el sistema en una matriz y aplicarle una serie de transformaciones hasta lograr el escalonamiento.

Escalonamiento: La matriz está escalonada si el número de ceros anteriores al primer elemento no nulo de cada renglón aumenta al pasar de un renglón al siguiente, hasta llegar eventualmente a renglones cuyos elementos son todos nulos.

Para lograr el escalonamiento en una matriz, es necesario aplicar las siguientes transformaciones:
a) Intercambiar dos renglones.
b) Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero.
c) Multiplicar un renglón por un escalar diferente de cero y sumarlo a otro renglón, reemplazando este último por el resultado obtenido.

Cuando dos sistemas de ecuaciones tienen las mismas soluciones, se dice que son equivalentes.

Ej. Obtener la solución de los siguientes sistemas compatibles determinados:

i.
$$\begin{aligned} X + Y + 2Z &= 3 \\ 3X + 4Y + Z &= -1 \\ -2X - 4Y - Z &= 0 \end{aligned}$$

Solución: X= -1, Y= 0, Z= 2

ii.
$$\begin{aligned} 2X + Y - Z &= -4 \\ -X + 2Z &= 7 \\ 3X - 2Y - Z &= 3 \end{aligned}$$

Solución: X= 1, Y= -2, Z= 4

iii.
$$\begin{aligned} X + 2Y - 3Z &= -5 \\ -Y + 2Z &= 5 \\ -2X + Y &= -11 \\ 3X + Z &= 13 \end{aligned}$$

Solución: X= 4, Y= -3, Z= 1

Ej. Obtener una solución general y una particular para los siguientes sistemas compatibles indeterminados:

i.
$$\begin{aligned} 3a + 3b - c + d + 4e &= 4 \\ a + b + c - 2d - e &= 1 \\ -2a - 2b + 2c - 3d - 5e &= -3 \end{aligned}$$

ii.
$$\begin{aligned} b - c &= 3 \\ 3a + b + 2c + d &= 6 \\ a + c &= 0 \\ 2a + b + c + d &= 6 \end{aligned}$$

iii. $a + 2b - 3c + 2d = -1$
$-a - 2b + 2c - 5d = 1$
$2a + 4b - 5c + 7d = -2$

Nota: El número de variables dependientes en un sistema compatible indeterminado, es igual al número de ecuaciones no nulas en la matriz escalonada.

Ej. Demostrar que los siguientes sistemas NO presentan solución:

i. $x + 2y - z = 1$
$2x + 3z = -2$
$-x + 2y - 4z = 4$
$3x + 2y + 2z = -1$

ii. $2x + 3y + z = 2$
$2x - y + z = 1$
$4x - 2y + 2z = 4$

Ej. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + \alpha z &= 2 \\ 3x + 4y + 2z &= \alpha \\ 2x + 3y - z &= 1 \end{aligned}$$

Obtener los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea:
a) Compatible determinado
b) Compatible indeterminado
c) Incompatible

Ej. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{aligned} x + y + \beta z &= 1 \\ x + \beta y + z &= 1 \\ \beta x + y + z &= -2 \end{aligned}$$

Obtener los valores de $\beta \in \mathbb{R}$ para que el sistema sea:
a) Compatible determinado
b) Compatible indeterminado
c) Incompatible

Ej. Se quiere determinar la edad de tres niños, Xóchitl, Yolanda y Zenón, todos ellos cursando la educación primaria.
Se sabe que la suma de las edades de Xóchitl y Yolanda es igual a la edad de Zenón más tres años, que la suma de las edades de Xóchitl y Zenón son 17 años, y que la suma del doble de la edad de Yolanda más la edad de Zenón es igual a 22 años. ¿Qué edad tiene cada niño?
Nota: Resolver por el método de Gauss

Un poco de humor