Álgebra

Capítulo

3

Números Complejos

Objetivo

El alumno usará los números complejos en sus diferentes representaciones y sus propiedades, para resolver ecuaciones con una incógnita que contengan números complejos.

Tema	Contenido
3.1	Forma binómica: Definición de número complejo, de igualdad y de conjugado. Representación gráfica. Operaciones y sus propiedades: adición, sustracción, multiplicación y división. Propiedades del conjugado.
3.2	Forma polar o trigonométrica: Transformación de la forma binómica a la polar y viceversa. Definición de módulo, de argumento y de igualdad de números complejos en forma polar. Operaciones en forma polar: multiplicación, división, potenciación y radicación.
3.3.	Forma exponencial o de Euler: Equivalencia entre la forma polar y la exponencial. Operaciones en forma exponencial: multiplicación, división, potenciación y radicación.
3.4.	Resolución de ecuaciones con una incógnita que involucren números complejos.

Números Complejos

Apuntes de Clase,

M.I. José Francisco Salgado Rodríguez

Introducción

Si $x^2 + c = 0 \rightarrow \mathbf{x} = \sqrt{\mathbf{c}}\sqrt{-\mathbf{1}} = \sqrt{\mathbf{c}}\,\mathbf{i}$

Definición

C = { Z | Z= a + b i, con a, b $\in \mathbb{R}$**, i** ^{2} **= -1}**

Clasificación

Forma binómica (algebraica): **Z= a + b i**
Conviene usarse en: Suma y resta
Forma Polar (Trigonométrica): **Z = r cis**θ
Conviene usarse en: Multiplicación, división, potencia y raíz enésima
Forma Euler (Exponencial): $\mathbf{Z} = \mathbf{re^{\theta\, i}}$
Conviene usarse en: Multiplicación, división, potencia y raíz enésima

Conjugado de un número complejo ($\bar{Z}$)

Si z = a + b i $\rightarrow$ $\bar{\mathbf{Z}}$ = a - b i y se representa como $\bar{\mathbf{Z}}$.

Propiedades del conjugado complejo

Para todo Z_1 y Z_2 $\in \mathbf{C}$:

1. $\overline{\overline{Z_1}} = Z_1$
2. $Z_1 = \bar{Z}_1 \; si \; \bar{Z}_1 \in \mathbb{R}$
3. $Z_1 + \bar{Z}_1 \in \mathbb{R}$
4. $Z_1\bar{Z}_1 \in \mathbb{R}$
5. $\overline{Z_1 + Z_2} = \bar{Z}_1 + \bar{Z}_2$
6. $\overline{Z_1 Z_2} = \bar{Z}_1\,\bar{Z}_2$

Operaciones con números complejos binómicos

Si $Z_1 = a + bi$ y $Z_2 = c + di$, entonces:

Adición: $Z_1 + Z_2 = (a + c)+(b + d)i$
Sustracción: $Z_1 - Z_2 = (a - c)+(b - d)i$
Multiplicación: $Z_1 Z_2 = (a + bi)(c + di) = (ac-bd)+(ad+bc)i$
División: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{a+bi}{c+di}\frac{c-di}{c-di} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$

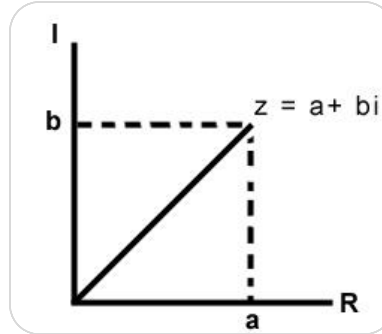

Figura 3.1.

Diagrama de Argand

Propiedades de las operaciones con complejos

Se cumplen las propiedades de cerradura, asociatividad, conmutatividad, elementos idénticos, elementos inversos y distributividad.

Diagrama de Argand

Para representar a los números complejos se utiliza un sistema coordenado bidimensional llamado "Diagrama de Argand", el eje horizontal es el eje de los Reales, mientras que el vertical es el de los imaginarios (figura 3.1).

Ej. 1. Sean $Z_1= -5 - 2i$ y $Z_2 = -1 + i$, obtener:

1. Z_1+Z_2
2. Z_1-Z_2
3. Z_1Z_2
4. $\frac{Z_1}{Z_2}$

Ej. 2. Si $Z_1= - i$, $Z_2 = 3$ y $Z_3 = \sqrt{2} - i$, obtener:

1. $\frac{Z_2}{Z_1} - Z_3 =$
2. $\frac{\overline{Z_1} Z_2}{Z_1 \overline{Z_3}} =$

Aplicaciones de los números Complejos en Ingeniería

Ingeniería electrónica: Se utiliza para describir de forma sencilla señales periódicas.

Ingeniería mecánica: Se usan para representar la relación espacial de los esfuerzos en un sistema o en un material.

Ingeniería civil: Se utilizan para representar esfuerzos en estructuras

Hidráulica: Para representar el comportamiento de los fluidos.

Aeronáutica: Se utiliza para representar las fuerzas resultantes en los componentes mecánicos y para modelar la fuerza de sustentación.

Ej. 3. Resolver las siguientes expresiones aritméticas complejas

1. $\frac{i^2+i^4+i^6}{i^3+i^5+i^7} =$

2. $\frac{\overline{(2-i)}+(2+i)(1+i)}{(2-4i)(2+i)} =$

3. $\frac{(1-3i)(4-i)^2+(4-i)(-1+5i)}{(4-i)(i)} =$

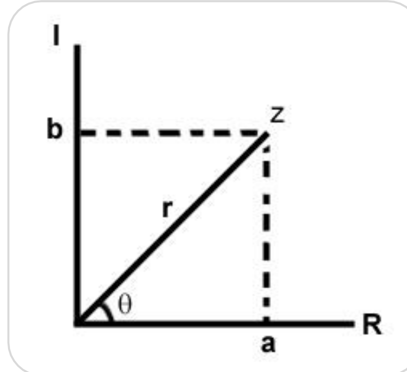

Figura 3.2.

Sobreposición de sistemas coordenados (Argand-Polar)

Forma polar (trigonométrica) de un número complejo

De la figura 3.2., se pueden obtener las ecuaciones de transformación:

De Polar a Binómica:
$a = r \cos \theta$
$b = r \operatorname{sen} \theta$

De Binómica a Polar:
$r = \sqrt{a^2 + b^2}$
$\theta = ang \tan\left(\frac{b}{a}\right)$

Ej. 4. Sean $Z_1 = -1 + i$ y $Z_2 = 2\text{cis}240°$, para Z_1 obtener su forma polar y para Z_2 su forma binómica.

Igualdad de números complejos en su forma polar

Teorema. Sean $Z_1 = r_1 \text{ cis } \alpha$ y $Z_2 = r_2 \text{ cis } \beta$
$Z_1 = Z_2$ si y solo si $r_1 = r_2$ y $\alpha = \beta + k(360°)$ con k=…-2, -1, 0, 1, 2, …

Ej. 5. Transformar a forma binómica $Z_1 = \sqrt{2}\text{cis}750°$.

Ej. 6. Transformar a forma polar:

a) $Z_1 = 2 - 2i$ b) $Z_2 = -3$ c) $Z_3 = 5i$ d) $Z_4 = -2i$ e) $Z_5 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Aplicaciones de los números Complejos en Ingeniería

Ingeniería electrónica: Se utiliza para describir de forma sencilla señales periódicas.

Ingeniería mecánica: Se usan para representar la relación espacial de los esfuerzos en un sistema o en un material.

Ingeniería civil: Se utilizan para representar esfuerzos en estructuras

Hidráulica: Para representar el comportamiento de los fluidos.

Aeronáutica: Se utiliza para representar las fuerzas resultantes en los componentes mecánicos y para modelar la fuerza de sustentación.

Ej. 7. Transformar a forma binómica:
a) Z_1= cis 510° b) Z_2= 4 cis 210° c) Z_3= 3 cis 270° d) Z_4= $2\sqrt{2}$ cis 315° e) Z_5= 7 cis 180°

Operaciones con números complejos polares

Si $Z_1 = r_1 \text{ cis } \alpha$ y $Z_2 = r_2 \text{ cis } \beta$, entonces:

Multiplicación: $Z_1\, Z_2 = r_1\, r_2 \text{ cis } (\alpha + \beta)$

División: $\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}$ cis $(\alpha - \beta)$

Potencia enésima: ${Z_1}^n = {r_1}^n \text{ cis } (n\alpha)$

Raíz enésima: $\sqrt[n]{Z_1} = \sqrt[n]{r_1} \text{ cis } \left(\frac{\alpha + k360°}{n}\right)$ con k= 0, 1, 2, …, (n-1)

Ej. 8. Obtener las raíces cúbicas de $-4\sqrt{3} - 4\,i$

Ej. 9. Obtener los valores de x tales que $x^3 + 64 = 0$

Ej. 10. Efectuar la siguiente operación:

$$(1 - i)^4 \frac{2\text{cis}60°}{-\sqrt{3} + i} =$$

Forma exponencial (Euler) de un número complejo

En el siglo XVIII el matemático suizo Leonard Euler, estableció la siguiente relación:

$$e^{\theta i} = \cos\theta + i\,\mathrm{sen}\theta$$

$$\therefore \text{Si } Z = r\,\mathrm{cis}\theta \Rightarrow Z = re^{\theta i} \text{ con } 0 \leq \theta < 2\pi$$

Operaciones con números complejos exponenciales

Si $Z_1 = r_1 e^{\alpha\, i}$ y $Z_2 = r_2 e^{\beta\, i}$, entonces:

Multiplicación: $Z_1 Z_2 = r_1 r_2 e^{(\alpha+\beta)\, i}$

División: $\frac{Z_1}{Z_2} = r_1 r_2 e^{(\alpha-\beta)\, i}$

Potencia enésima: ${Z_1}^{n} = {r_1}^{n}\, e^{(n\alpha)\, i}$

Raíz enésima: $\sqrt[n]{Z_1} = \sqrt[n]{r_1}\quad e^{\left(\frac{\alpha+2k\pi°}{n}\right)\, i}$ con k= 0, 1, 2, …, (n-1)

Ej. 11. Dados los siguientes números complejos:

$$Z_1 = \sqrt{3}e^{\frac{\pi}{2}i},\ Z_2 = e^{\pi i}, \qquad Z_3 = 8e^{3\pi i}, \qquad Z_4 = 5e^{\frac{4\pi}{3}i}$$

Realizar las siguientes operaciones:

a) $Z_1 Z_2 =$

b) $\frac{Z_1}{Z2} =$

c) $(Z_3)^{\frac{2}{3}} =$

d) $\frac{Z_1+Z_2}{Z_4} =$

Ej. 11. Representar en el diagrama de Argand las soluciones de la ecuación:

$$\frac{4-4i}{Z^{\frac{3}{4}}} = 2e^{\pi i}$$

Leonard Euler

1707-1883

Matemático suizo quien en el terreno del álgebra obtuvo resultados destacados, como el de la reducción de una ecuación cúbica a una bicuadrada y el de la determinación de la constante que lleva su nombre.

Las facultades que desde temprana edad demostró para las matemáticas pronto le ganaron la estima del patriarca de los Bernoulli, Johann, uno de los más eminentes matemáticos de su tiempo y profesor de Euler en la Universidad de Basilea.

A lo largo de sus innumerables publicaciones introdujo gran número de nuevas técnicas y contribuyó sustancialmente a la moderna notación matemática de conceptos como función y la expresión del número imaginario “i” (raíz de menos uno).

Leonard Euler

Ejercicios propuestos.

1. Determinar los valores de X, Y ∈ R, tal que.

$$(X - 2i)cis180° + (2 + Yi)e^{\frac{\pi}{4}i} = 4e^{\frac{\pi}{2}i}$$

2. Obtener los valores de $X \in \mathbb{C}$ y representarlos gráficamente en el plano de Argand.

$$X^{\frac{3}{2}} + \overline{Z_3} - \overline{Z_1} + \frac{2Z_1}{Z_2\overline{Z_3}} = 0$$

Donde:
$Z_1 = \sqrt{2}cis225°$
$Z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$
$Z_3 = 2cis540°$

Un poco de humor