Álgebra

Capítulo

2

Números Reales

Objetivo
El alumno aplicará las propiedades de los números reales y sus subconjuntos, para demostrar algunas proposiciones por medio del método de inducción matemática y para resolver inecuaciones.

Tema	Contenido
2.1	El conjunto de los números naturales: Concepto intuitivo de número natural. Definición del conjunto de los números naturales mediante los postulados de Peano. Definición y propiedades: adición, multiplicación y orden en los números naturales. Demostración por Inducción Matemática.
2.2	El conjunto de los números enteros: Definición a partir de los números naturales. Definición y propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los enteros. Representación de los números enteros en la recta numérica.
2.3.	El conjunto de los números racionales: Definición a partir de los números enteros. Definición y propiedades: igualdad, adición, multiplicación y orden en los racionales. Expresión decimal de un número racional. Algoritmo de la división en los enteros. Densidad de los números racionales y representación de éstos en la recta numérica.
2.4.	El conjunto de los números reales: Existencia de números irracionales (algebraicos y trascendentes). Definición del conjunto de los números reales; representación de los números reales en la recta numérica. Propiedades: adición, multiplicación y orden en los reales. Completitud de los reales. Definición y propiedades del valor absoluto. Resolución de desigualdades e inecuaciones.

CAPITULO 2

Números Reales

Apuntes de Clase,

M.I. José Francisco Salgado Rodríguez

Estudio de los números reales:
- Método constructivo ($\mathbb{N} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$)
- Enfoque axiomático

2.1. Números naturales ($\mathbb{N}$)

El conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$) es tal que:
1) $1 \in \mathbb{N}$
2) Para cada n $\exists$ un único $n^* \in \mathbb{N}$, llamado el siguiente de n
3) Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene que $n^* \neq 1$
4) Si $m, n \in \mathbb{N}$ y $m^* = n^*$ entonces $m = n$
5) Todo subconjunto S de $\mathbb{N}$, que tenga las propiedades:
    a) $1 \in S$
    b) $k \in S$, implica que $k^* \in S$

   Es el mismo subconjunto $\mathbb{N}$. (Principio de inducción)

Operaciones con números Naturales

Adición en $\mathbb{N}$
Definición: Para dos números n y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:
1) $n + 1 = n^*$
2) $n + m^* = (n + m)^*$

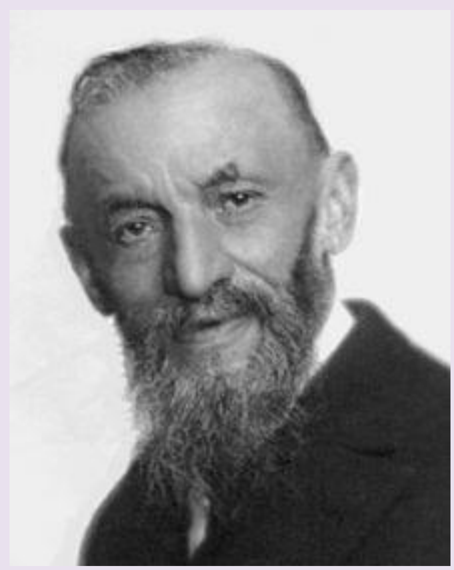
Multiplicación en $\mathbb{N}$
Definición: Para dos números n y $m \in \mathbb{N}$, se tiene que:
1) $n \cdot 1 = n$
2) $n \cdot m^* = (n\, m) + n$

Giuseppe Peano

1858-1932

Fue un matemático, lógico y filósofo italiano, conocido por sus contribuciones a la lógica matemática y la teoría de números. Peano publicó más de doscientos libros y artículos, la mayoría en matemáticas. La mayor parte de su vida la dedicó a enseñar en Turín.

Los axiomas de Peano o postulados de Peano son un sistema de axiomas de segundo orden para la aritmética ideados por el matemático Giuseppe Peano en el siglo XIX, para definir los números naturales.



Giuseppe Peano

Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{N}$

1) $m + n \in \mathbb{N}$	$m \cdot n \in \mathbb{N}$	→ **Cerradura**
2) $m + (n + p) = (m + n) + p$	$m\,(n\,p) = (m\,n)\,p$	→ **Asociatividad**
3) $m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$	→ **Conmutatividad**
4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$	Si $m\,p = n\,p \rightarrow m = n$	→ **Cancelación**
5) $m\,(n + p) = m\,n + m\,p$		→ **Distributiva**

Inducción matemática

Sirve para demostrar la validez de cualquier enunciado relativo a N, basándose en el quinto postulado de Peano. Se estudiarán ejercicios de sumatorias, multiplicación y divisibilidad.

Tipo 1, sumatoria

1. $\{ x \mid x = 2n - 1, n \in \mathbb{N} \} \rightarrow 1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 2n - 1 = n^2 ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \frac{1}{4}n^2(n+1)^2;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
3. $2 + 6 + 12 + \cdots + n(n+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2);\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
4. $\frac{2}{1(2)} + \frac{2}{2(3)} + \frac{2}{3(4)} + \cdots + \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2n}{n+1} ;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
5. $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3};\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
6. $3^1 + 3^2 + 3^3 + \cdots + 3^n = \frac{3}{2}(3^n - 1);\ \forall\, n \in \mathbb{N}$

Tipo 2, multiplicación

1. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)\left(1+\frac{1}{4}\right)\ldots\left(1+\frac{1}{n}\right) = n+1;\ \forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{16}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n^2}\right) = \frac{n+1}{2n};\ \forall\, n \geq 2$

Tipo 3, multiplicación

1. $2^{4n} - 1$ es divisible entre 15; $\forall\, n \in \mathbb{N}$
2. $6^n - 1$ es divisible entre 5; $\forall\, n \in \mathbb{N}$
3. $2^{2n} + 5$ es divisible entre 3; $\forall\, n \in \mathbb{N}$
4. $7(16^{n-1}) + 3$ es divisible entre 5; $\forall\, n \in \mathbb{N}$
5. $10^{n+1} + 3(10^n) + 5$ es divisible entre 9; $\forall\, n \in \mathbb{N}$

Orden en los naturales

Ley de la tricotomía
Si m y n $\in \mathbb{N}$, entonces se verifica una y sólo una de las siguientes proposiciones:
1) $n < m$
2) $n = m$
3) $n > m$

Teorema: Para toda m, n y p $\in \mathbb{N}$:
1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
2) $m < n \rightarrow m\,p < n\,p$
3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

2.2. Números enteros ($\mathbb{Z}$)

Dados dos números naturales n y m, si:

$$n + x = m \rightarrow x = m - n$$

Se pueden presentar tres casos:
1) $m > n \rightarrow x \in \mathbb{N}$
2) $m = n \rightarrow x = 0; x \in \mathbb{Z}$
3) $m < n \rightarrow x < 0; x \in \mathbb{Z}$

Definición
$\mathbb{Z} = \{ x \mid x = m - n;$ con m, n $x \in \mathbb{N} \}$

Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{Z}$

1) $m + n \in \mathbb{Z}$	$m \cdot n \in \mathbb{Z}$	→ **Cerradura**
2) $m + (n + p) = (m + n) + p$	$m\,(n\,p) = (m\,n)\,p$	→ **Asociatividad**
3) $m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$	→ **Conmutatividad**
4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$	Si $m\,p = n\,p \rightarrow m = n$	→ **Cancelación**
5) $m + 0 = m$	$m \cdot 1 = m$	→ **Elementos idénticos**
6) $m + (-m) = 0$		→ **Elementos inversos**
7) $m\,(n + p) = m\,n + m\,p$		→ **Distributiva**

Orden en los enteros

Teorema: Para toda m, n y p $\in \mathbb{Z}$:
1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
2) $m < n \rightarrow$ Si $p > 0$: $m\,p < n\,p$
$\rightarrow$ Si $p < 0$: $m\,p > n\,p$
3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

2.3. Números racionales ($\mathbb{Q}$)

Dados dos números enteros a y b, si:

$$b\,x = a \rightarrow x = \frac{a}{b}$$

Se pueden presentar tres casos:

1) b es factor de a $\rightarrow x \in \mathbb{N}$
2) b NO es factor de a, con $b \neq 0 \rightarrow x \in \mathbb{Q}$
3) $b = 0$ y $a \neq 0$: $\frac{a}{b} \rightarrow \infty$
   $b = 0$ y $a = 0$: $\frac{a}{b}$ es indeterminado

Definición

$\mathbb{Q} = \{ x \mid x = \frac{a}{b}$; con $a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0 \}$

Propiedades de la adición y multiplicación en $\mathbb{Q}$

1) $m + n \in \mathbb{Q}$	$m \cdot n \in \mathbb{Q}$	→ **Cerradura**
2) $m + (n + p) = (m + n) + p$	$m\,(n\,p) = (m\,n)\,p$	→ **Asociatividad**
3) $m + n = n + m$	$m \cdot n = n \cdot m$	→ **Conmutatividad**
4) Si $m + p = n + p \rightarrow m = n$	Si $m\,p = n\,p \rightarrow m = n$	→ **Cancelación**
5) $m + 0 = m$	$m \cdot 1 = m$	→ **Elementos idénticos**
6) $m + (-m) = 0$	$m\,(1/m) = 1$	→ **Elementos inversos**
7) $m\,(n + p) = m\,n + m\,p$		→ **Distributiva**

Operaciones sobre números racionales

Suma y resta: $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}$

Multiplicación: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

División: $\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

Teorema. Todo número racional tiene una expresión decimal periódica.

Algoritmo de la división para los números enteros

Dados dos números enteros a y b con $b > 0$, existen dos enteros q y r, con $0 \quad r < b$, tal que:

$$a = b\,q + r$$

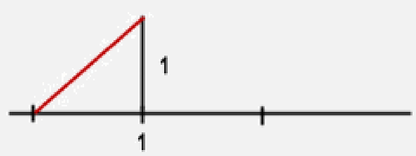
Ej. Determinar los valores de a y b ∈ ℤ, tal que:

1. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.833\hat{3}\ldots$
2. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 1.833\hat{3}\ldots$
3. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.555\hat{5}\ldots$
4. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.36\widehat{36}\ldots$
5. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 1.40\widehat{66}\ldots$
6. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.733\hat{3}\ldots$
7. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.825$
8. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.99\hat{9}\ldots$
9. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 0.1875$
10. $\frac{a}{\mathrm{b}} = 1.772727\ldots$

Números Irracionales (ℚ')

Se clasifican en: Algebraicos (raíces: √2, √3, etc.) y trascendentes (π, e, ln(x), etc.).
Nota: Los números irracionales son expresiones decimales no periódicas.

Al hacer uso del teorema sobre la "*Densidad de los números racionales*", parecería que los números racionales cubren por completo la recta numérica, pero esto no es así.
A partir de proyecciones geométricas como la que se muestra a continuación sabemos que existen otros números llamados irracionales (ℚ'), que ocupan espacios en la recta numérica.



Números Reales (ℝ)

Los números reales quedan definidos como la unión de racionales e irracionales, es decir:

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

Orden en los reales

Teorema: Para toda m, n y p ∈ ℝ:
1) $m < n \rightarrow m + p < n + p$
2) $m < n \rightarrow$ Si $p > 0$: $m\,p < n\,p$
$\rightarrow$ Si $p < 0$: $m\,p > n\,p$
3) $m < n$ y $n < p \rightarrow m < p$

Valor absoluto y sus propiedades

Definición. Sea x un número real, el valor absoluto de x ($|x|$), se define como:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ si } x \geq 0 \\ -x, \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Las propiedades más importantes del valor absoluto se enuncian en el siguiente teorema:

Teorema. Para todo $x, y \in \mathbb{R}$:

i. $|x| \geq 0$. Además $|x| = 0$ si $x = 0$
ii. $|xy| = |x|\ |y|$
iii. $|x+y| \leq |x| + |y|$

Teorema. Sea $\alpha \in \mathbb{R}$ con $\alpha \geq 0$; $\forall\, x \in \mathbb{R}$ se tiene que:

$$|x| \leq \alpha \leftrightarrow -\alpha \leq x \leq \alpha$$

De manera general para cualquier expresión p en términos de x:

$$|p| > \alpha \begin{cases} p > \alpha \quad \text{(Desigualdad 1)} \\ p < -\alpha \ \text{(Desigualdad 2)} \end{cases}$$

La solución general de la desigualdad con valor absoluto, cuando el **valor absoluto mayor que el escalar**, será igual a la **Unión de desigualdades** que resultan de aplicar el teorema

$$|p| < \alpha \begin{cases} p < \alpha \quad \text{(Desigualdad 1)} \\ p > -\alpha \ \text{(Desigualdad 2)} \end{cases}$$

La solución general de la desigualdad con valor absoluto, cuando el **valor absoluto menor que el escalar**, será igual a la **Intersección de desigualdades** que resultan de aplicar el teorema.

Desigualdades o inecuaciones

Se resuelven tomando como base el teorema de "*Orden en los Reales*".

Ej. Determinar los valores x ∈ ℝ, tal que:

1. $-3 + 5X > -2X + 11$; Solución: $X \in (2, \infty)$ ó $X > 2$
2. $\frac{1}{2} + 3X < -4X + \frac{1}{3}$; Solución: $X \in (-\infty, -\frac{1}{42})$
3. $\frac{2X-1}{X+2} < 5$ con $X \neq -2$; Solución: $X \in \left(-\infty, -\frac{11}{3}\right) \cup (-2, \infty)$
4. $\frac{2X-3}{X+2} < \frac{1}{3}$ con $X \neq -2$; Solución: $X \in \left(-2, \frac{11}{5}\right)$
5. $\frac{3}{X} < 5$ con $X \neq 0$; Solución: $X \in (-\infty, 0) \cup \left(\frac{3}{5}, \infty\right)$
6. $\frac{3X+8}{X-4} < 2$ con $X \neq 4$; Solución: $X \in (-16, 4)$
7. $X^2 - X - 2 > 0$; Solución: $X \in (-\infty, -1) \cup (2, \infty)$
8. $(3X+2)^2 < X(X-6)$; Solución: $X \in (-2, -\frac{1}{4})$
9. $(3X-1)(2X+4) > (3X-1)(X+5)$; Solución: $X \in \left(-\infty, \frac{1}{3}\right) \cup (1, \infty)$
10. $3 + |X-2| > 4$; Solución: $X \in (-\infty, 1) \cup (3, \infty)$
11. $2|X-3| - 3 > -\frac{2}{3}|X-3| - 2$; Solución: $X \in \left(-\infty, \frac{21}{8}\right) \cup \left(\frac{27}{8}, \infty\right)$
12. $|X^2 - 16| > 0$; Solución: $X \in R$ con $X \neq \mp 4$
13. $-|3X-2| > -2$; Solución: $X \in \left(0, \frac{4}{3}\right)$
14. $|4X-1| < |2-X|$; Solución: $X \in \left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{5}\right)$ con $X \neq \frac{1}{4}$ en una solución
15. $|3-2X| < |2+X|$; Solución: $X \in \left(\frac{1}{3}, 5\right)$ con $X \neq \frac{3}{2}$ en una solución

Un poco de humor

Cualquier parecido con la realidad, es mera coincidencia