Álgebra

Capítulo 1

Trigonometría

Objetivo
El alumno reforzará los conceptos de trigonometría para lograr una mejor comprensión del álgebra.

Tema	Contenido
1.1	Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera.
1.2	Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.
1.3.	Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.
1.4.	Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30, 45 y 60 grados y sus múltiplos.
1.5.	Identidades trigonométricas.
1.6.	Teorema de Pitágoras.
1.7.	Ley de senos y ley de cosenos.
1.8.	Ecuaciones trigonométricas de primer y segundo grado con una incógnita.

CAPITULO 1

Trigonometría

Apuntes de Clase,

M.I. José Francisco Salgado Rodríguez

1.1. Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo cualquiera.

Las funciones trigonométricas se definen de la siguiente manera:

Seno. Es la razón entre la ordenada y la distancia al origen.
Coseno. Es la razón entre la abscisa y la distancia al origen.
Tangente. Es la razón entre la ordenada y la abscisa.
Cotangente. Es la razón entre la abscisa y la ordenada.
Secante. Es la razón entre la distancia al origen y la abscisa.
Cosecante. Es la razón entre la distancia al origen y la ordenada.

Considerando un sistema coordenado cartesiano bidimensional y tomando en cuenta 4 puntos, cada uno de ellos en un cuadrante distinto (A en el primer cuadrante, B en el segundo, C en el tercero y D en el cuarto), además de cuatro medidas angulares (α en el primer cuadrante, β en el segundo, γ en el tercero y δ en el cuarto), las funciones trigonométricas quedan definidas de la siguiente manera para cada uno de los cuadrantes.

Tomando como referencia a la figura 1.1., tenemos que:

En el primer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{OA}|}\,;\cos\alpha = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{OA}|};\tan\alpha = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{OE}|}$$

$$\csc\alpha = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{AE}|}\ ;\ \sec\alpha = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OE}|};\ \cot\alpha = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{AE}|}$$

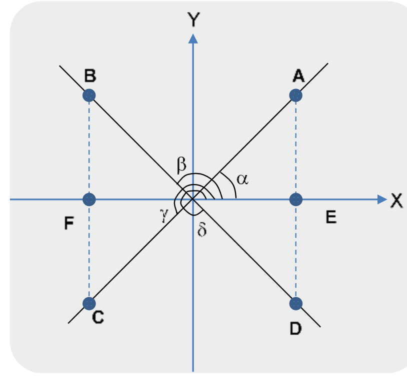


Figura 1.1.

Sistema coordenado empleado para definir las funciones trigonométricas

¿Sabías qué? ...

Hace unos 4000 años en Babilonia y Egipto se utilizaban medidas de ángulos y longitudes de los lados de triángulos rectángulos en la agricultura y en la construcción de las pirámides.

Los egipcios fijaron la medida de los ángulos en grados, minutos y segundos.

Pirámide de Giza

En el segundo cuadrante:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{OB}|}\,;\cos\beta = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{OB}|};\tan\beta = \frac{|\overline{BF}|}{|\overline{OF}|}$$

$$\csc\beta = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{BF}|}\,;\sec\beta = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OF}|};\cot\beta = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{BF}|}$$

En el tercer cuadrante:

$$\operatorname{sen}\gamma = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{OC}|}\,;\cos\gamma = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{OC}|};\tan\gamma = \frac{|\overline{CF}|}{|\overline{OF}|}$$

$$\csc\gamma = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{CF}|}\,;\sec\gamma = \frac{|\overline{OC}|}{|\overline{OF}|};\cot\gamma = \frac{|\overline{OF}|}{|\overline{CF}|}$$

En el cuarto cuadrante:

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OD}|}\,;\cos\delta = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{OD}|};\tan\delta = \frac{|\overline{DE}|}{|\overline{OE}|}$$

$$\csc\delta = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{ED}|}\,;\ \sec\delta = \frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OE}|};\ \cot\delta = \frac{|\overline{OE}|}{|\overline{DE}|}$$

1.2. Definición de las funciones trigonométricas para un ángulo agudo en un triángulo rectángulo.

Seno. Es la razón entre el cateto opuesto y la hipotenusa.
Coseno. Es la razón entre el cateto adyacente y la hipotenusa.
Tangente. Es la razón entre el cateto opuesto y el cateto adyacente.
Cotangente. Es la razón entre el cateto adyacente y el cateto opuesto.
Secante. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente.
Cosecante. Es la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto.

Usando el triángulo rectángulo de la figura 1.2., se tiene lo siguiente:

Para el ángulo α:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{a}{c}\,;\cos\alpha = \frac{b}{c};\tan\alpha = \frac{a}{b}$$

$$\csc\alpha = \frac{c}{a}\,;\sec\alpha = \frac{c}{b};\cot\alpha = \frac{b}{a}$$

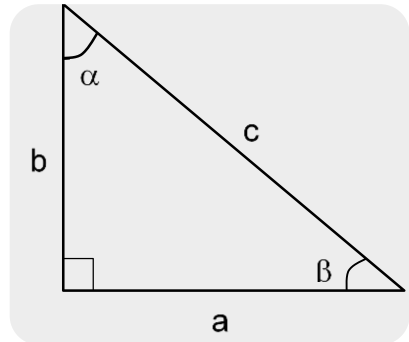


Figura 1.2.

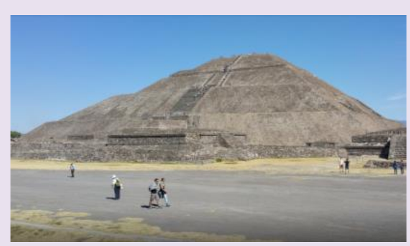
Triángulo rectángulo

¿Sabías qué? ...

Las culturas mesoamericanas lograron grandes avances en arquitectura y astronomía, basándose principalmente en preceptos matemáticos y geométricos.

Los calendarios mesoamericanos fueron los más exactos de la época y los errores de cálculo son mínimos respecto a nuestro calendario actual.

Por otra parte, la pirámide del Sol en Teotihuacan y la pirámide de Giza en Egipto miden prácticamente lo mismo en su base (230 m), lo cual es una asombrosa similitud.



Pirámide del Sol en Teotihuacan

Para el ángulo β:

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{b}{c}\,;\cos\beta = \frac{a}{c};\tan\beta = \frac{b}{a}$$

$$\csc\beta = \frac{c}{b}\,;\sec\beta = \frac{c}{a};\cot\beta = \frac{a}{b}$$

1.3. Signo de las funciones trigonométricas en los cuatro cuadrantes.

Los signos de las funciones trigonométricas se muestran en la figura 1.3.

1.4. Valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60° y sus múltiplos.

Existen diversos métodos para obtener los valores de las funciones trigonométricas para ángulos de 30°, 45° y 60°. En el curso veremos dos distintas metodologías para la obtención de estos valores. A través de la formación de una tabla y a través de triángulos equilátero e isósceles. A continuación, se muestra la tabla 1.1., el resumen de los principales valores angulares para las seis funciones trigonométricas.

θ	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
tan	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	−∞
cot	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	−∞	0
sec	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	2	∞	-1	∞
csc	∞	2	$\frac{2}{\sqrt{2}}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1	∞	-1

Tabla 1.1. Valores de las funciones trigonométricas, para ángulos de 30°, 45°, 60° y sobre los ejes coordenados (0°, 90°, 180° y 270°).

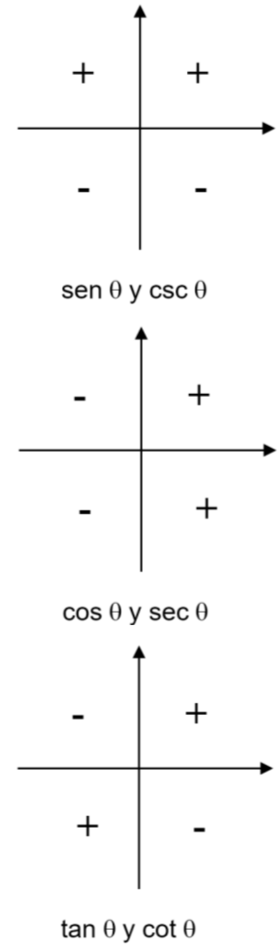


Figura 1.3.
Signos en los 4 cuadrantes

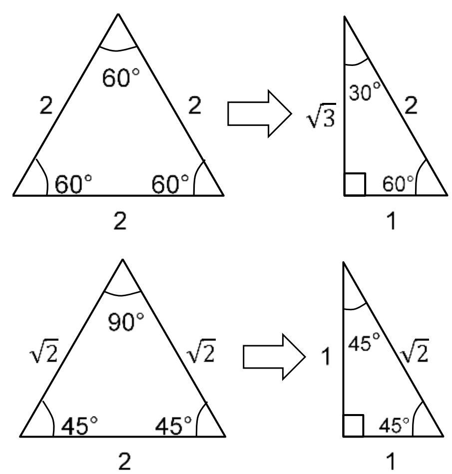
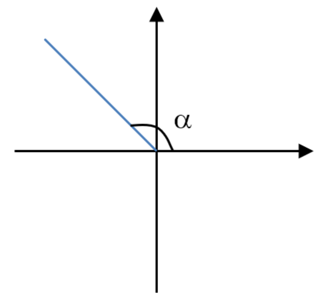
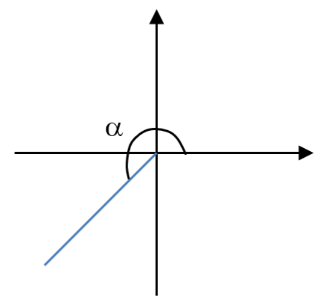


Figura 1.4.
Triángulos equilátero e isósceles.

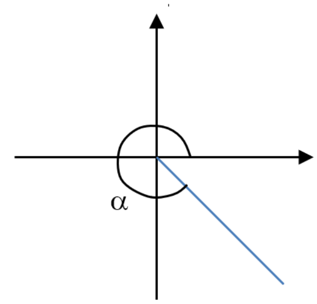
Cuando se tienen valores superiores a 90°, es decir para valores angulares en el segundo, tercero y cuarto cuadrante, se deben reducir los ángulos al primer cuadrante (ya que los valores de las funciones trigonométricas son equivalentes), como se muestra en la figura 1.5.



$\theta = 180° - \alpha$



$\theta = \alpha - 180°$



$\theta = 360° - \alpha$

Figura 1.5.
Reducción de ángulos al primer cuadrante

1.5. Identidades trigonométricas.

En este curso se estudiarán identidades trigonométricas Pitagóricas e identidades trigonométricas que incluyan suma y diferencia de ángulos.

1.5.1. Identidades Pitagóricas

Para obtener las identidades trigonométricas, haremos uso de un círculo unitario con centro en el origen, también llamado círculo trigonométrico (ver figura 1.6.).

Del triángulo OAC:

$$\text{a) sen}\ \alpha = \frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{OC}}}\ ;\ \ \text{Pero}\ |\overline{\mathrm{OC}}| = 1\ \therefore \text{sen}\ \alpha = \overline{\mathrm{AC}}$$

$$\text{b) cos}\ \alpha = \frac{\overline{\mathrm{OA}}}{\overline{\mathrm{OC}}}\ ;\ \ \text{Pero}\ |\overline{\mathrm{OC}}| = 1\ \therefore \text{sen}\ \alpha = \overline{\mathrm{OA}}$$

$$\text{c) Aplicando el T. de Pitágoras:}\ \ \mathbf{sen^2\ \alpha + cos^2\ \alpha = 1}$$

Del triángulo OBD:

$$\text{a) tan}\ \alpha = \frac{\overline{BD}}{\overline{\mathrm{OB}}}\ ;\ \ \text{Pero}\ |\overline{\mathrm{OB}}| = 1\ \therefore \text{tan}\ \alpha = \overline{\mathrm{BD}}$$

$$\text{b) sec}\ \alpha = \frac{\overline{\mathrm{OD}}}{\overline{\mathrm{OB}}}\ ;\ \ \text{Pero}\ |\overline{\mathrm{OB}}| = 1\ \therefore \text{sec}\ \alpha = \overline{\mathrm{OD}}$$

$$\text{c) Usando el t. de Pitágoras:}\ \mathbf{sec^2\ \alpha - tan^2\ \alpha = 1}$$

Del triángulo OFE:

$$\text{a) csc}\ \alpha = \frac{\overline{OF}}{\overline{\mathrm{OE}}}\ ;\ \ \text{Pero}\ |\overline{\mathrm{OE}}| = 1\ \therefore \text{csc}\ \alpha = \overline{\mathrm{OF}}$$

$$\text{b) cot}\ \alpha = \frac{\overline{\mathrm{EF}}}{\overline{\mathrm{OE}}}\ ;\ \ \text{Pero}\ |\overline{\mathrm{OE}}| = 1\ \therefore \text{cot}\ \alpha = \overline{\mathrm{EF}}$$

$$\text{c) Usando el t. de Pitágoras:}\ \mathbf{csc^2\ \alpha - cot^2\ \alpha = 1}$$

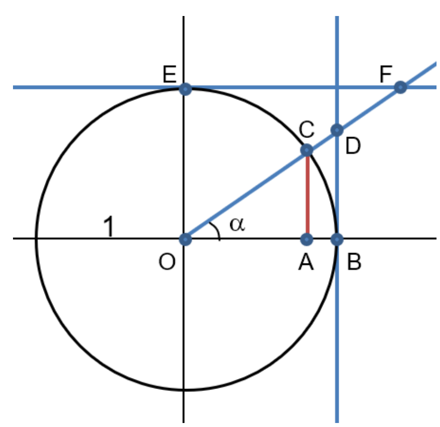


Figura 1.6.

Triángulos equilátero e isósceles.

1.5.2. Suma y diferencia de ángulos.

Suma de ángulos en el seno

De la figura 1.7., y tomando como referencia el triángulo **OAE**:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{|\overline{AE}|}{|\overline{OE}|} = \frac{|\overline{AC}| + |\overline{CE}|}{|\overline{OE}|} \cdots 1;\ \text{Pero } \overline{AC} = \overline{BD} \ \therefore \operatorname{sen}(\alpha+\beta)$$

$$= \frac{|\overline{BD}| + |\overline{CE}|}{|\overline{OE}|} \cdots 2$$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OE}|}\frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OD}|} + \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{OE}|}\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{ED}|} = \frac{|\overline{BD}|}{|\overline{OD}|}\frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OE}|} + \frac{|\overline{CE}|}{|\overline{ED}|}\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OE}|} \cdots 3$$

Simplificando (3) con base en la figura 1.7.:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \cos\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

Suma de ángulos en el coseno

De la figura 1.7., y tomando como referencia el triángulo **OAE**:

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{|\overline{OA}|}{|\overline{OE}|} \cdots 1;\ \ \overline{OA} + \overline{AB} = \overline{OB};\ \ \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{AB};\ \ \overline{AB} = \overline{CD}$$

$$\therefore \overline{OA} = \overline{OB} - \overline{CD} \cdots 2$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \frac{|\overline{OB}| - |\overline{CD}|}{|\overline{OE}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OE}|} - \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OE}|} = \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OE}|}\frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OD}|} - \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{OE}|}\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{ED}|}$$

$$= \frac{|\overline{OB}|}{|\overline{OD}|}\frac{|\overline{OD}|}{|\overline{OE}|} - \frac{|\overline{CD}|}{|\overline{ED}|}\frac{|\overline{ED}|}{|\overline{OE}|} \cdots 3$$

Simplificando (3) con base en la figura 1.7.:

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\ \operatorname{sen}\beta$$

Suma de ángulos en la tangente

Sabemos que $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{sen(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)} = \dfrac{sen\alpha\cos\beta + cos\alpha\ sen\beta}{cos\alpha\ cos\beta - sen\alpha\ sen\beta}$

Multiplicando por $\dfrac{cos\alpha\cos\beta}{cos\alpha\ cos\beta}$: $\tan(\alpha+\beta) = \dfrac{tan\alpha + tan\beta}{1 - tan\alpha\ tan\beta}$

Ej 1. Obtener los valores de sen, cos y tan para 15°, 75° y 105°

Ej 2. Determinar el valor de:

a) cos 45° + cos 30°
b) cos 75°
c) sen 120° + sen 45°
d) sen 165°

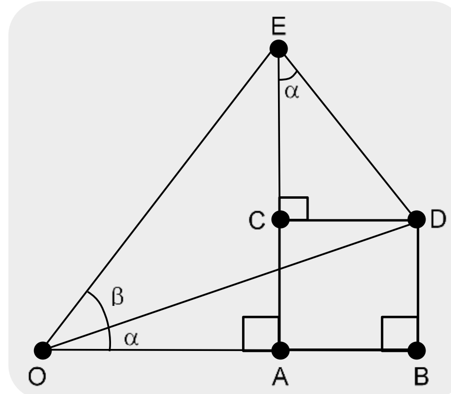


Figura 1.7.

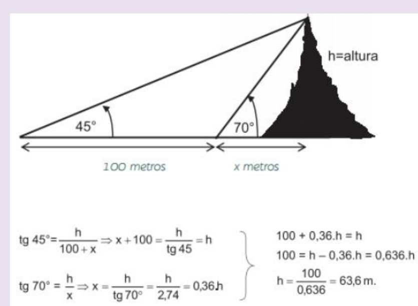
Suma y diferencia de ángulos para las funciones trigonométricas.

Aplicaciones de la trigonometría en la vida cotidiana

Se pueden utilizar los conceptos trigonométricos para medir longitudes, distancias, ángulos de inclinación, etc.

Dentro de las aplicaciones más destacadas incluyen la navegación, geografía, astronomía, arquitectura y en muchas de las áreas de la ingeniería.

Ej. Calcular la altura de la montaña.



1.5.3. Funciones pares e impares.

Funciones pares: Son aquellas funciones simétricas respecto al eje coordenado horizontal (abscisas).

cos (-a)= cos a ; sec(-a)=sec a

Funciones impares: Son aquellas funciones simétricas respecto al eje coordenado vertical (ordenadas).

sen (-a)= -sen a ; csc(-a)=-csc a ;
tan(-a)= -tan a ; cot(-a)= -cot a

Ej 3. Obtener:
a) sen (a-b), cos (a-b), tan (a-b)
b) sen (2a), cos (2a), tan (2a)

Ej 4. Demostrar:

1. sen(-a) tan(-a) + cos(-a) = sec(-a)
2. sen(-a) sec(-a) = tan(-a)
3. csc(-a) cos(-a) = - cot(a)
4. $\frac{\mathbf{cot(-a)}}{\mathbf{csc(-a)}}$ = cos(a)
5. $\frac{\mathbf{sec(-a)}}{\mathbf{tan(-a)}}$ = -csc(a)
6. $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{cos(-a)}}$ – tan(-a)sen(-a) = cos(a)
7. cot(-a) cos(-a) + sen(-a) = - csc(a)
8. sec(a) – cos(a) = sen(a) tan(a)
9. sen(a) [tan(a) + cot(a)] = sec(a)
10. $\frac{\mathbf{cos(a)}}{\mathbf{1-sen(a)}} = \frac{\mathbf{1+sen(a)}}{\boldsymbol{cos}\mathbf{(a)}}$

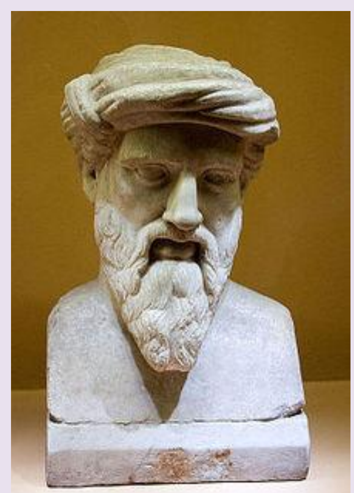
1.6. Teorema de Pitágoras.

La suma del cuadrado de los catetos es igual al cuadrado de la hipotenusa.

Pitágoras
569-475 a.C.

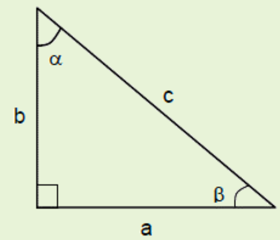
Fue un filósofo y matemático griego considerado el primer matemático puro. Contribuyó de manera significativa en el avance de la matemática helénica, la geometría, la aritmética, derivadas particularmente de las relaciones numéricas, y aplicadas por ejemplo a la teoría de pesos y medidas, a la teoría de la música o a la astronomía.

No se ha conservado ningún escrito original de Pitágoras. Sus discípulos —los pitagóricos— invariablemente justificaban sus doctrinas citando la autoridad del maestro de forma indiscriminada, por lo que resulta difícil distinguir entre los hallazgos de Pitágoras y los de sus seguidores.



Busto de Pitágoras, museos Capitolinos, Roma

Ej 5. Para el triángulo rectángulo que a continuación se muestra, obtener los valores solicitados:



1. Si b=4 y c=5, obtener el valor de a
2. Si a=1 y c=$\sqrt{5}$, obtener el valor de b
3. Si a=8 y b=8, obtener el valor de β
4. Si a=$\sqrt{12}$ y b=2, obtener el valor de α

Conversión de grados a radianes

Ej 6. Partiendo de la igualdad: $\boldsymbol{\pi} = \mathbf{180°}$, obtener:

1. $\boldsymbol{cos}(-\frac{3\pi}{4})$
2. $\boldsymbol{sen}(-\frac{3\pi}{2})$
3. $\boldsymbol{tan}(-\boldsymbol{\pi})$
4. $\boldsymbol{cot}(-\frac{3\pi}{4})$
5. $\boldsymbol{sec}(-\frac{\pi}{3})$
6. $\boldsymbol{csc}(-\frac{5\pi}{6})$

1.7. Ley de senos y ley de cosenos.

Ambas leyes (teoremas) son aplicables para triángulos oblicuángulos (ver figura 1.8.).

Ley de los senos

Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, matemáticamente queda expresado de la siguiente manera:

$$\frac{a}{sen\,\alpha} = \frac{b}{sen\,\beta} = \frac{c}{sen\,\gamma}$$

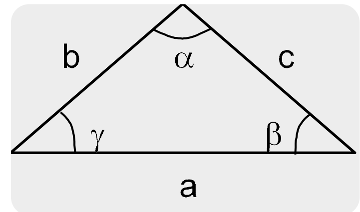


Figura 1.8.

Triángulo oblicuángulo.

Aplicaciones de la trigonometría en la ingeniería

Videojuegos. Se usa en la programación de videojuegos, tanto en la parte geométrica como en la física.

Ingeniería Civil. Se usa en la construcción de puentes, carreteras, edificios, etc. Así como en el diseño estático de las estructuras.

Ingeniería mecánica. Se utiliza en las proyecciones de fuerzas que intervienen en los sistemas mecánicos.

Ingeniería electrónica. Se usa para identificar el comportamiento de las señales (senoidales) en circuitos eléctricos - electrónicos.

Ley de los cosenos

El cuadrado del lado de un triángulo (ver figura 1.6.) es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados, menos el duplo del producto de dichos lados, por el coseno del ángulo que forman, matemáticamente queda expresado de la siguiente manera:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\ cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\ cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\ cos\gamma$$

Ej 7. Resolver los siguientes ejercicios utilizando las leyes de senos y / o cosenos, según corresponda.

a) Desde lo alto de un globo se observa un pueblo A con un ángulo de 50º, y otro B, situado al otro lado y en línea recta, con un ángulo de 60º. Sabiendo que el globo se encuentra a una distancia de 6 kilómetros del pueblo A y a 4 del pueblo B, calcula la distancia entre los pueblos A y B.

b) Los flancos de un triángulo forman un ángulo de 80º con la base. Si el triángulo tiene 30 centímetros de base, calcula la longitud de sus lados.

c) Tres amigos se sitúan en un campo de fútbol. Entre Alberto y Benito hay 25 metros, y entre Benito y Carlos, 12 metros. El ángulo formado en la esquina de Carlos es de 20º. Calcula la distancia entre Alberto y Carlos.

d) Una valla cuyo perímetro tiene forma triangular mide 20 metros en su lado mayor, 6 metros en otro y 60º en el ángulo que forman entre ambos. Calcula cuánto mide el perímetro de la valla.

1.8 Ecuaciones trigonométricas de primer y segundo grado con una incógnita.

Son ecuaciones que involucran funcione trigonométricas, pero que se resuelven de la misma forma que se resuelven las ecuaciones de primer y segundo grado que involucran literales como incógnitas.

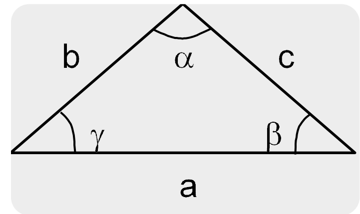


Figura 1.8.

Triángulo oblicuángulo.

Aplicaciones en la astronomía y en la navegación

Astronomía. Al no poder interactuar el observador directamente con los objetos celestes debido a la gran distancia que con estos cuerpos, se deben emplear métodos trigonométricos (como el paralaje trigonométrico) para conocer, por ejemplo, la distancia entre dos o más cuerpos celestes.

Navegación. La trigonometría fue utilizada en la navegación durante muchos años haciendo uso del sextante, instrumento con el que se podía medir distancias y posiciones triangulando con el Sol o las estrellas.

También se podían realizar cálculos matemáticos junto con el sextante para determinar la posición del observador sobre la superficie terrestre, hoy en día este tipo de cálculos se apoya en la navegación satelital o GPS.

Ej 8. Determinar el valor de α en las siguientes ecuaciones trigonométricas, para el intervalo $0° \leq \alpha \leq 360°$.

1. $\tan(\alpha) = \tan(90 - 2\alpha)$
2. $4\cos(\alpha) = -\sqrt{12}$
3. $-3 + 3\tan(\alpha) = -6$
4. $2\cos(\alpha) = \cot(\alpha)$
5. $2\text{sen}^2(\alpha) + \text{sen}(\alpha) = 0$

Un poco de humor